

Proseminar im WS 08/09

Offene Randbedingungen für Feldprobleme auf Basis von Koordinatentransformationen

von
Timo Korthals

betreuender Dozent:
Prof. Dr.-Ing. Rolf Schuhmann

1. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Feldarten der Elektrotechnik	3
2	Koordinatensysteme in 2D	4
2.1	Gegenüberstellung von Kartesischen- & Polarkoordinaten	4
3	Mathematische Grundlagen	5
3.1	Die Laplacegleichung in Polarkoordinaten	7
4	Maxwellsche Gleichungen in differenzieller & integraler Form	8
5	Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik	8
6	Numerik	9
6.1	Warum Numerik?	9
6.2	Finite-Differenzen-Methode (FDM)	9
6.2.1	Das Differenzengitter	9
6.2.2	Herleitung der Differentialgleichungen durch Differenzen	10
6.2.3	Differenzenstern	10
6.2.4	Eintragen in ein Gleichungssystem	10
6.3	Beispiel an einem Koaxialkabel	12
6.3.1	Aufgabenstellung	12
6.3.2	FDM in Polarkoordinaten	12
6.3.3	Vereinfachung der Aufgabenstellung	13
7	Die Kelvintransformation	15
7.1	Grundlegendes	15
7.2	Transformation	16
7.3	Aufstellen eines allg. Gleichungssystems	16
7.4	Aufstellen der Differenzensterne	17
7.4.1	Aufstellen des Gleichungssystems für A_1	18

7.4.2	Aufstellen des Gleichungssystems für A_2'	19
7.4.3	Zusammenführen der beiden Gleichungssysteme	20
7.5	Résumé	21
7.5.1	Beispiel mit Matlab	21
8	Quellenangabe	23

Zusammenfassung

Bei der Computersimulation von elektromagnetischen Feldern muss wegen der begrenzten Rechnerkapazitäten das Rechengebiet grundsätzlich begrenzt werden, obwohl sich in vielen Fällen die Felder (zumindest im theoretischen Modell) unendlich weit in den Raum erstrecken. Ein eleganter Weg zur Realisierung von „offenen Randbedingungen“ verwendet einfache Koordinatentransformationen und gelangt dabei zu Randoperatoren für elektrostatische oder Wellenfelder.

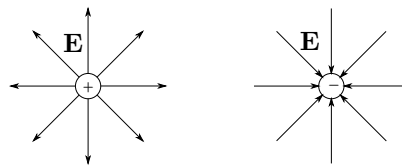
1 Einführung in die Feldarten der Elektrotechnik

- **Skalarfeld:** $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ (Temperatur-, Potentialfeld), jedem Punkt im Raum ist ein Wert zugeordnet
Bsp.: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$
- **Vektorfeld:** $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ (Kraft-, \vec{E} -Feld), jedem Punkt im Raum ist ein Vektor zugeordnet
Bsp.: $(F(x, y, z) = (x, y, z)$
 - Wirbelfeld: Bsp.: Stromdurchflossener Leiter wird von einem Magnetischen Feld umgeben
 - Potenzialfeld: Bsp.: zwei Elektrische Ladungen bilden ein Elektrisches Feld mit Quelle(Q^+) und Senke(Q^-)

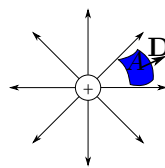
In der Elektrotechnik werden folgende Vektorfelder behandelt:

- Elektrostatik

- E : Elektrisches Feld, Einheit: $[V/m]$



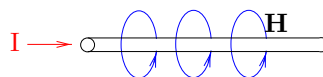
- D : Elektrische Flussdicht, Einheit: $[As/m^2]$



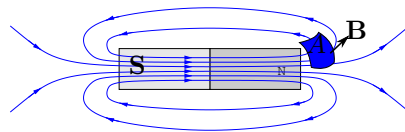
- diese beiden Felder sind über die Permittivität (Materialkonstante) ϵ_0 mit $D = \epsilon_0 E$ verknüpft, Einheit: $[F/m]$

- Magnetostatik

- H : Magnetisches Feld, Einheit: $[A/m]$



- B : Magnetische Flussdicht, Einheit: $[Vs/m^2]$



- diese beiden Felder sind über die Permeabilität (Materialkonstante) μ mit $B = \mu H$ verknüpft, Einheit: $[H/m]$

2 Koordinatensysteme in 2D

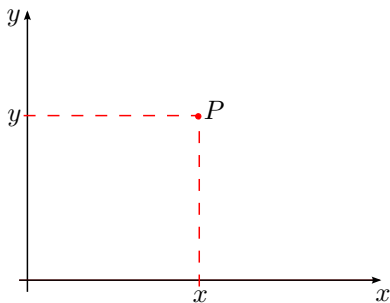
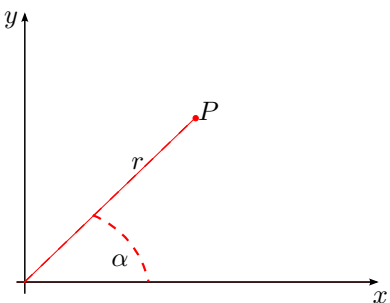
Für diesen Beitrag ist eine vereinfachte Betrachtung der Probleme in 2 Dimensionen völlig ausreichend, sodass wir uns auch auf diese beschränken wollen.

Das grundlegendste Koordinatensystem, welches am weitesten verbreitet ist, ist das Kartesische. In ihm wird ein Punkt P durch die Geraden x und y , die jeweils senkrecht auf der Abzisse und der Ordinate stehen, definiert.

Für viele Feldprobleme in der Elektrotechnik, und auch für die Kelvintransformation (wie wir später noch sehen werden), ist die Darstellung eines Punktes P durch dessen Radius r und dem Winkel α weitaus besser zu handhaben.

Bsp.: Rotationssymmetrische Felder

2.1 Gegenüberstellung von Kartesischen- & Polarkoordinaten

Kartesisch		Polar
		
P ist der Schnittpunkt der beiden Geraden an x und y		P ist der Radius r mit dem Winkel α
x	\rightarrow	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
y		$\alpha = \text{atan2}(y/x)$
$x = r \cdot \cos(\alpha)$	\leftarrow	r
$y = r \cdot \sin(\alpha)$		α

3 Mathematische Grundlagen

Vereinbarung: Alle Laufvariablen seien dimensionslos!

Für die folgende Einführung wird zur Veranschaulichung von einem parabolischen Funktionsverlauf ausgegangen, der wie folgt beschrieben ist:

$$U(x, y) = x^2 \quad (1)$$

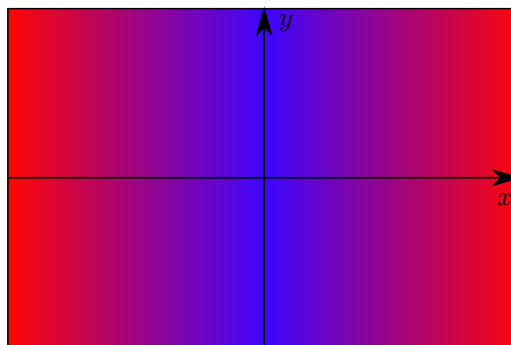


Abbildung 1: parabolischer Funktionsverlauf

Nabla Operator

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2)$$

Gradient

Richtungsabhängige Änderung des Funktionsverlaufes ($\text{grad} f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$)

$$\text{grad} f = \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Beispiel zu (1):

$$\text{grad} U(x, y) = \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) = (2x, 0) \quad (4)$$

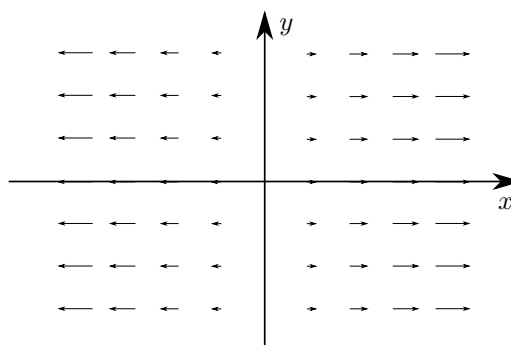


Abbildung 2: Steigung des Funktionsverlaufes

Divergenz

Dies ist ein Maß für die Quellen und Senken eines Vektorfeldes ($\operatorname{div} f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$)

$$\operatorname{div} F = \nabla F := \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \quad (5)$$

Beispiel zu (1):

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U(x, y)) = \frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 2 \quad (6)$$

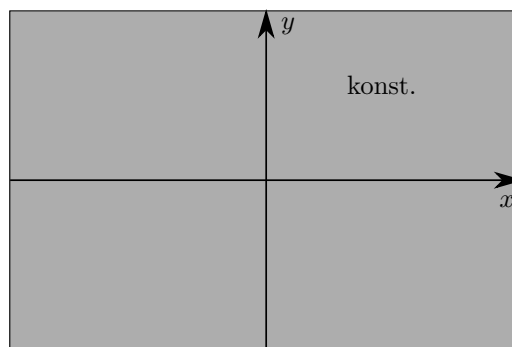


Abbildung 3: Quellenverteilung des parabolischen Funktionsverlaufes

Rotation

Zur Ergänzung sei hier noch die Rotation eines Vektorfeldes gegeben. Ein Beispiel hierfür wird in den *Maxwellschen* Gleichungen erwähnt. „ $\operatorname{rot} F$ “ Bildet den Drehvektor eines Vektorfeldes ($|\operatorname{rot} F|$ ist ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit) ($\operatorname{rot} f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$)

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F := \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{e}_z \quad (7)$$

Laplace-Operator

Ist ein Maß für die Quellen und Senken eines Potentialfeldes ($\Delta f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$)

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (8)$$

Beispiel zu (1):

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 2 + 0 = 2 \quad (9)$$

Wir umgehen mit dem Laplaceoperator quasi einen Schritt, und kommen von der Ausgangsgleichung (1) direkt auf den Quellenverlauf.

3.1 Die Laplacegleichung in Polarkoordinaten

Für weitere Problemstellungen wollen wir auf das Polarkoordinatensystem zurückgreifen, da viele Problemstellungen viel einfacher in diesem berechnet werden können. Ein einfaches Beispiel sei wie folgt gegeben:

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad U(r, \alpha) = r \quad (10)$$

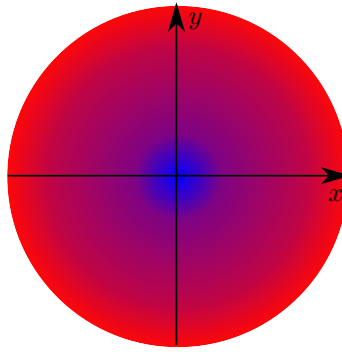


Abbildung 4: Radialer Funktionsverlauf

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten würde sich wie folgt berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \Delta U(x, y) &= \frac{d^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{dx^2} + \frac{d^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{dy^2} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} + \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Dies ist selbst für eine so einfache Funktion sehr unübersichtlich. Es liegt also nahe, ein Laplacegleichung in Polarkoordinaten zu entwickeln:

Kartesische Koordinaten

Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \end{aligned} \quad (12)$$

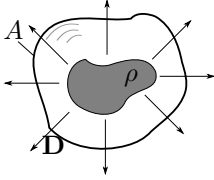
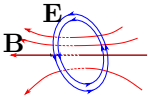
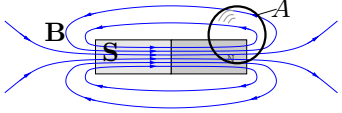
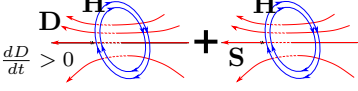
Wenn wir jetzt die Funktion (10) noch einmal mit dem Laplaceoperator in Polarkoordinaten ausrechnen, löst sich alles in Wohlgefallen auf:

$$\Delta U(r, \alpha) = \frac{\partial^2 U(r, \alpha)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \alpha)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0 + \frac{1}{r} + 0 = \frac{1}{r} \quad (13)$$

Auch wenn die beiden Gleichungen (13) und (11) im ersten Augenblick ungleich aussehen, so sind sie für eingesetzte Werte absolut gleich.

4 Maxwellsche Gleichungen in differenzieller & integraler Form

Merke: ρ : Raumladungsdichte, J_L : Leitungsstromdichte, ∂V (∂A): Rand eines Volumens (einer Fläche), Q : freie Ladung, I : Strom im Leiter

differentielle Form	Verknüpfung	Integralform	Erläuterung
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\xleftrightarrow{\text{Gauß}}$	$\oint_{\partial V} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_V \rho dV = Q$	Das D-Feld ist ein Quellenfeld 
$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$	Induktionsgesetz 
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\xleftrightarrow{\text{Gauß}}$	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$	Quellenfreiheit eines magnetischen Feldes 
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_L + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	$\oint_{\partial A} \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_A \mathbf{J}_L d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = I$	Der Strom I erzeugt ein H-Feld 

5 Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik

Sei U ein Potentialfeld mit $\mathbf{E} = -\nabla U$ bzw. $\int \mathbf{E} d\mathbf{s} = -U$. So folgt für das Vakuum:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla U = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14)$$

bzw. die *Poissongleichung* mit:

$$\Delta U = \nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15)$$

Und für den feldfreien Raum die *Laplacegleichung* mit:

$$\Delta U = \nabla^2 U = 0 \quad (16)$$

Merke: Das Feld kann hier nur durch die Randbedingungen entstehen

6 Numerik

6.1 Warum Numerik?

Viele Methoden zur Lösung einer Gleichung führen auf exakte, explizite mathematische Darstellungen der Felder. Andere sind allerdings nur näherungsweise oder für Grenzfälle gültig. Reale Probleme erfüllen aber nur selten diese Anforderungen. Will man reale Probleme lösen und kann sich nicht mit vereinfachten Modellen zufrieden geben, so muss man eine numerische Methode verwenden.

Unser Ziel ist es, in den folgenden Kapiteln, die Laplacegleichung numerisch dar zu stellen um das Potentialfeld zu ermitteln.

6.2 Finite-Differenzen-Methode (FDM)

Die FDM geht von einer lokalen Beschreibung des Feldes durch eine Differentialgleichung aus. Bei der FDM wird der kontinuierliche Problemraum räumlich durch ein Gitter ersetzt. Das Gitter ist durch diskrete Gitterpunkte definiert. In einem nächsten Schritt werden die in der Differentialgleichung auftretenden Differentiale durch Differenzen ersetzt und die kontinuierliche Feldfunktion durch eine diskrete Funktion, die nur auf den Gitterpunkten gegeben ist. Die resultierenden algebraischen Finite-Differenzen-Gleichungen werden schließlich unter Berücksichtigung von Anfangs- und Randbedingungen in ein lineares Gleichungssystem überführt.

6.2.1 Das Differenzengitter

Man kann einen Problemraum auf unterschiedlichste Weise diskretisieren. Die einfachste und anschaulichste Methode, die jedoch nicht immer zum besten Ergebnis führt, ist die äquidistante Diskretisierung. Dabei haben die Gitterpunkte alle den selben Abstand oder Winkel voneinander, was in späteren Berechnungen des Differenzensternes zu sehr eleganten Vereinfachungen führt. Zusätzlich nummerieren wir die Gitterpunkte noch durch, um jeden Gitterpunkt identifizieren zu können.

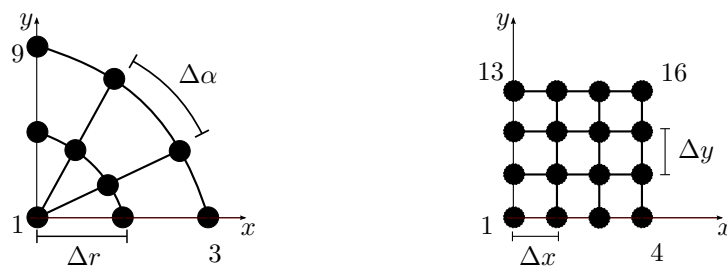


Abbildung 5: Äquidistante Diskretisierung des ersten Quadranten im Polaren(links) und Kartesischem(rechts) System

Als Beispiel, betrachten wir eine 1-dimensionale Funktion $f(x)$ mit den vorgegebenen Randwerten $f(10) = 0$ und $f(15) = 5$, die für die 2. Ableitung verschwindet. Die zu ermittelnde Funktion ist denkbar einfach: $f(x) = x - 10$.

Wir wollen die Funktionswerte aber numerisch berechnen. Dazu wählen wir eine äquidistante Diskretisierung mit $\Delta = 1$ und nummerieren das Gitter entsprechend auf der x -Achse:

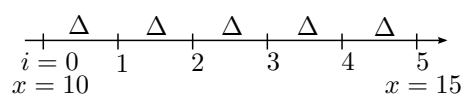


Abbildung 6: Beispiel zur Diskretisierung

6.2.2 Herleitung der Differentialgleichungen durch Differenzen

Unser Ziel ist es, die Differentiale, oder viel mehr die Funktion f an der Stelle x_0 , der *Laplace*gleichung durch Näherungen zu ersetzen.

Merke: Δ sei hier nicht der *Laplace*operator, sondern eine nicht infinitesimale Differenz.

Wenn wir eine Funktion f an einer Stelle $x_0 + \Delta$ betrachten, so lässt sich diese durch eine Taylorreihe darstellen:

$$f(x_0 + \Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \cdot f(x_0)^{(n)} = f(x_0) + \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{\Delta^n}{n!} f^n(x_0) \quad (17)$$

Würden wir jetzt nach $f'(x_0)$ oder $f''(x_0)$ umstellen, wäre der Fehler den wir machen noch zu groß, also betrachten wir jetzt noch den folgenden Punkt:

$$f(x_0 - \Delta) = f(x_0) - \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x_0) - \dots \quad (18)$$

Wenn wir jetzt 17 und 18, subtrahieren oder addieren erhalten wir nach entsprechenden Umformungen:

$$\frac{17-18}{2\Delta} \quad f(x_0)' \approx \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0 - \Delta)}{2\Delta} \quad (19)$$

$$\frac{17+18}{\Delta^2} \quad f(x_0)'' \approx \frac{f(x_0 + \Delta) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta)}{\Delta^2} \quad (20)$$

Was wir aus diesen beiden Formeln sehen können, ist die Tatsache, dass die erste und zweite Ableitung der Funktion jeweils durch die benachbarten Gitterpunkte mit guter Näherung definiert ist. Die Approximation wird umso genauer, je feiner das Rechengitter, oder entsprechend Δ ist. Den Fehler den wir in beiden Fällen machen ist jeweils quadratisch zu Δ .

Wenden wir uns nun dem Beispiel aus 6.2.1 zu und betrachten die Ableitungen im Punkt i :

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta} \quad f_i'' \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2} \quad (21)$$

6.2.3 Differenzenstern

Der Differenzenstern ist eine Darstellung, wie die Ableitung an der Stelle i von den Faktoren seiner benachbarten Gitterpunkten abhängt. Dies vereinfacht das Aufstellen eines Gleichungssystems erheblich.

Für das 1-dimensionale Beispiel aus 6.2.1 erhalten wir somit für die 2. Ableitung folgenden Differenzenstern:

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \Rightarrow 1 \text{ --- } -2 \text{ --- } 1 \quad (22)$$

6.2.4 Eintragen in ein Gleichungssystem

Für unser Beispiel erhalten wir jetzt 4 Gleichungen, die wir mit dem ermittelten Differenzenstern in ein Gleichungssystem der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ schreiben können:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'' \Delta^2 - f_0 \\ f_2'' \Delta^2 \\ f_3'' \Delta^2 \\ f_4'' \Delta^2 - f_5 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Nach einsetzen der vorgegebenen Randbedingungen und $f''(x) = 0$ erhalten wir 4 Gleichungen mit 4 Unbekannt die noch auf dem Papier zu lösen sind. Bei 2 oder 3-dimensionaler Diskretisierung mit mehreren Millionen Gitterpunkten, ist die Lösung nur noch iterativ mit Computern zu ermitteln.

Unser Beispiel können wir noch lösen, indem wir von links mit der Inversen von \mathbf{A} multiplizieren. Somit erhalten wir folgende Funktionswerte:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 & -0,6 & -0,4 & -0,2 \\ -0,6 & -1,2 & -0,8 & -0,4 \\ -0,4 & -0,8 & -1,2 & -0,6 \\ -0,2 & -0,4 & -0,6 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(11) \\ f(12) \\ f(13) \\ f(14) \end{pmatrix} \quad (25)$$

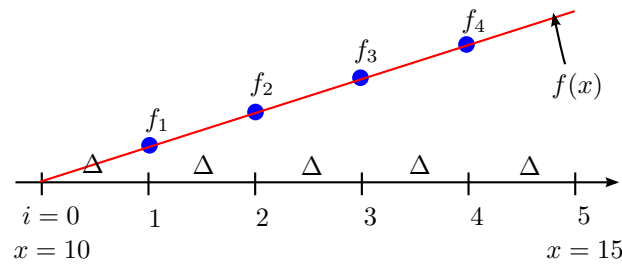


Abbildung 7: Ergebniss der ermittelten Werte

Es ist noch zu bemerken, dass die FDM für Funktionen bis zweiten Grades exakte Werte ermittelt.

6.3 Beispiel an einem Koaxialkabel

6.3.1 Aufgabenstellung

Es soll das *zweidimensionale* elektrostatische Problem einer Koaxialleitung gelöst werden. Zwischen dem Innenleiter ($r \leq r_i$) und dem Außenleiter ($r \geq r_a$) liegt die Spannung $U = 1V$. Das Problem wird mit einem regelmäßigen 2D-Gitter in Zylinderkoordinaten modelliert. Es kann für $r_i \leq r \leq r_a$ von der *Laplacegleichung* ausgegangen werden. Es gelte

$$\begin{aligned} r_i &= 1 & r_a &= 3 \\ \Delta r &= 1 & \Delta \alpha &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

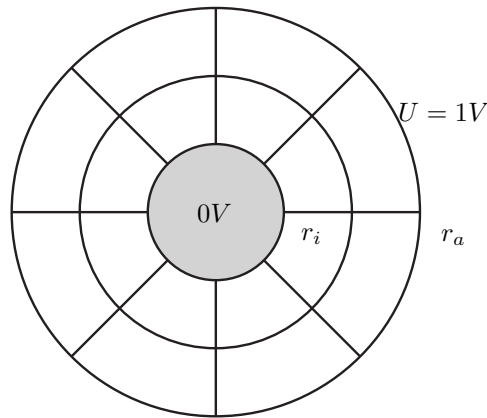


Abbildung 8: Querschnitt eines Koaxialkabels

6.3.2 FDM in Polarkoordinaten

Sei nun die 2-dimensionale *Laplacegleichung* in Polarkoordinaten gegeben:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \quad (26)$$

Wir beziehen uns nun auf 6.2.1 und nehmen folgendes an:

$h = \Delta \alpha = \text{konst.}$ $k = \Delta r = \text{konst.}$ r = Radius des betrachteten Gitterpunktes U_0

Nun können wir folgenden Differenzenstern entwickeln:

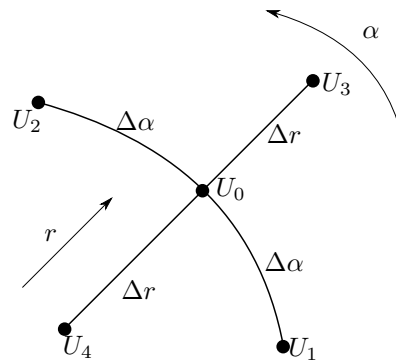


Abbildung 9: Differenzenstern in Polarkoordinaten

Ausgehend von den Taylorreihen der einzelnen Punkte, erhalten wir im Anschluss die Approximationen für die einzelnen Ableitungen. Diese können dann in die Laplacegleichung für Polarkoordinaten eingesetzt werden, um die einzelnen Koeffizienten zu ermitteln.

$$U_1 = U_0 - hU_\alpha + \frac{h^2}{2}U_{\alpha\alpha} - \dots \quad (27)$$

$$U_2 = U_0 + hU_\alpha + \frac{h^2}{2}U_{\alpha\alpha} + \dots \quad (28)$$

$$U_3 = U_0 + kU_r + \frac{h^2}{2}U_{rr} + \dots \quad (29)$$

$$U_4 = U_0 - kU_r + \frac{h^2}{2}U_{rr} - \dots \quad (30)$$

Umstellen der Gleichungen, um die Ableitungen zu erhalten:

$$\Rightarrow \quad U_{rr} \approx \frac{U_3 - 2U_0 + U_4}{k^2} \quad , \quad U_r \approx \frac{U_3 - U_4}{2k} \quad , \quad U_{\alpha\alpha} \approx \frac{U_1 - 2U_0 + U_2}{h^2} \quad (31)$$

Einsetzen in die Laplacegleichung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \\ &\approx \frac{U_3 - 2U_0 + U_4}{k^2} + \frac{1}{r} \frac{U_3 - U_4}{2k} + \frac{1}{r^2} \frac{U_1 - 2U_0 + U_2}{h^2} \\ &= -4U_0 + 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} U_1 + 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} U_2 + \frac{2h^2 r^2 + h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} U_3 + \frac{2h^2 r^2 - h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} U_4 \end{aligned} \quad (32)$$

Somit erhalten wir nun folgende Koeffizienten im Differenzenstern

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} \\ & & | \\ & & -4 \\ & & | \\ \frac{2h^2 r^2 - h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} & \text{---} & \frac{2h^2 r^2 + h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} \\ & & | \\ & & 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} \end{array} \quad (33)$$

6.3.3 Vereinfachung der Aufgabenstellung

Da es sich hier um ein rotationsymmetrisches Problem handelt, reicht die Betrachtung in einer Dimension (entlang des Radius) aus. Dies wird auch dadurch klar, da das Potentialfeld in α -Richtung keine Änderung erfährt, und somit die Ableitung nach α in der Laplacegleichung zu 0 wird.

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (34)$$

Nach dieser Überlegung erhalten wir folgenden Differenzenstern:

$$1 - \frac{k}{2r} \quad \text{---} \quad -4 \quad \text{---} \quad 1 + \frac{k}{2r} \quad (35)$$

Da diese Aufgabenstellung nun wieder analog zu 6.2 ist, ersparen wir uns hier das händische aufstellen einer Matrix und benutzen Matlab zur weiteren Betrachtung.

Wir wollen lediglich kurz die analytische Funktion als Referenz herleiten:

Ansatz: $a \cdot \log r + b$ ist eine Lösung der Laplacegleichung ($a, b \in \mathbf{R}$)

Ermitteln der Konstanten:

$$U(r=1) = 0 = a \cdot \log 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$U(r=3) = 1 = a \cdot \log 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\log 3}$$

$$\text{Einsetzen in den Ansatz: } \Rightarrow U(r) = \frac{1}{\log 3} \log r$$

Auf den folgenden Bildern ist auf der linken Seite ein 1-dimensionaler Plott $U(r)$ abgebildet. Wobei die grüne Kennlinie die **analytische Funktion** und die blaue Kurve die **numerische Funktion** abbildet. Man kann erkennen, dass für eine steigende Anzahl an Gitterpunkten (Rechenaufwand) sich die numerischen Werte immer mehr an den wirklichen Potentialverlauf anschmiegen.

Auf der rechten Seite ist entsprechend ein 2-dimensionaler Plott, bei dem der Farbverlauf das Potential darstellt.

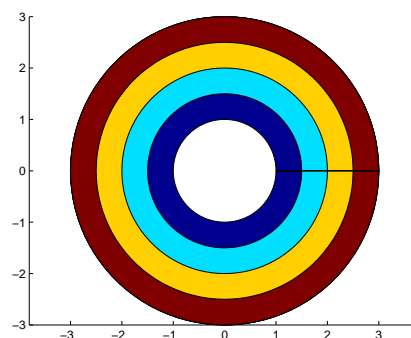
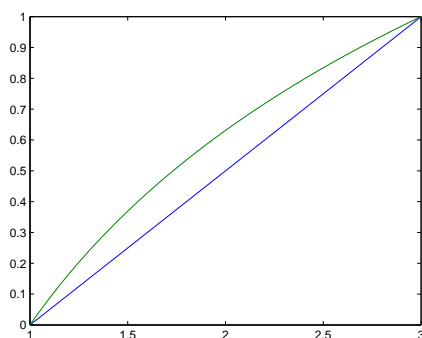
Merke: Matlab interpoliert zwischen den numerischen Werten mittels Geraden.

Gitterpunkte

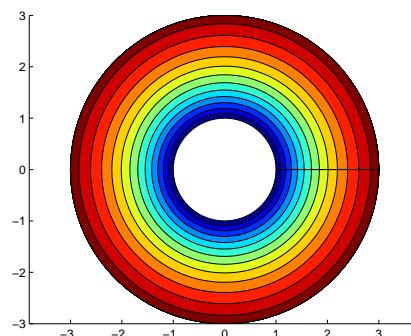
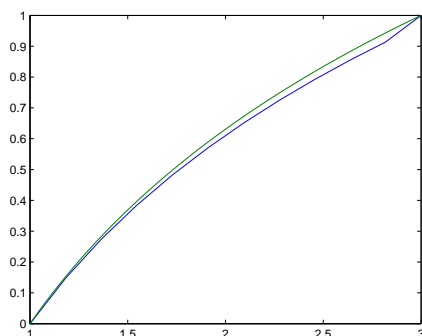
$U(r)$

$U(x,y)$

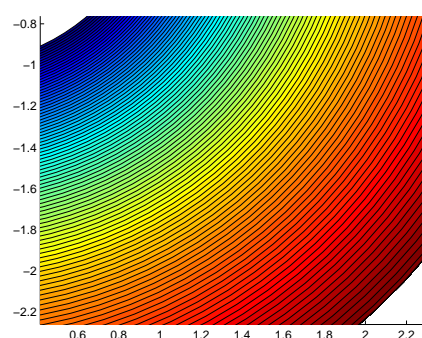
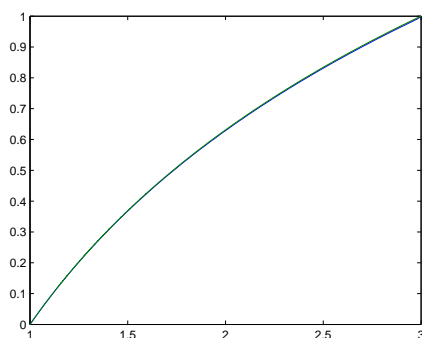
1



10



100

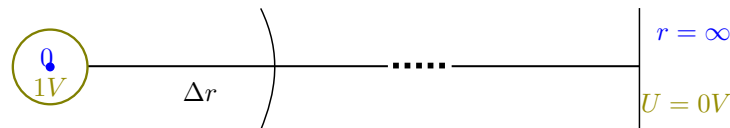


7 Die Kelvintransformation

7.1 Grundlegendes

In den vorherigen Beispielen konnten wir die numerischen Gleichungssysteme lösen, da wir gegebene Randbedingungen hatten. Was soll man aber machen wenn man keine Randbedingungen einsetzen kann?

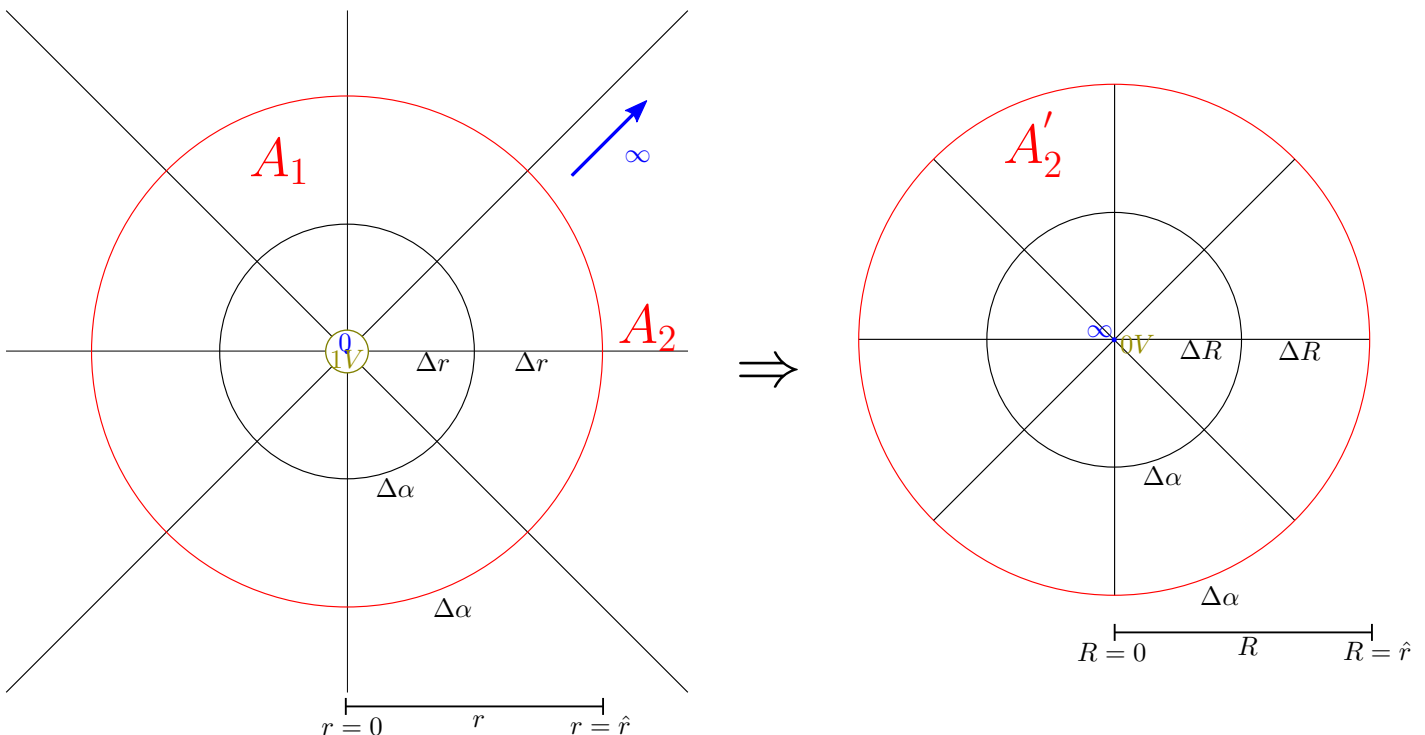
Als Beispiel sei hier eine Sphäre gegeben, deren Randbedingung wir zumindest an der Oberfläche ermitteln können (1V). Nun wollen wir aber anhand numerischer Berechnungen erfahren, wie sich das Potentialfeld ins Unendliche ausdehnt. Zwar können wir die Randbedingung für $r = \infty$ bestimmen: „ $U(r = \infty) = 0V$ “, doch können wir diese nirgends einsetzen. Mit aquidistanter und selbst mit nicht aquidistanter Diskretion kann der Punkt $r = \infty$ nicht erreicht werden.



Um dieses Missgeschick zu umgehen, bietet sich hier die *Kelvintransformation* an. Die Idee dahinter ist die folgende: Es ist ein unendlich großes Gebiet $A \in \mathbf{R}$ gegeben. Nun wird A in zwei Teilgebiete A_1 und A_2 unterteilt ($A_1, A_2 \subset A$), wobei A_1 eine Kreisscheibe mit dem Radius \hat{r} und den Nullpunkt als Zentrum ist, A_2 ist entsprechend $A_2 = A \setminus A_1$, also das äußere Gebiet (Anschaulich: Eine unendlich große Kreisscheibe mit einem Loch). Nun wird A_2 mittels der *Kelvintransformation* zu A'_2 transformiert. Diese neue Gebiet A'_2 stellt nun wieder eine geschlossene Kreisscheibe dar. Diese hat den Radius \hat{r} wobei hier das Zentrum der Kreisscheibe die Unendlichkeit darstellt. Es gilt außerdem $\partial A_1 = \partial A'_2 = \partial A_2$, dass heißt der **Rand** und seine Werte bleiben bei der Transformation erhalten.

Nun kann man ein Gitter in A'_2 legen, welches als Randbedingung $r = \infty$ mit einschließt und dessen Potential wir in den Quellvektor eintragen können. Zu beachten ist, dass eine äquidistante Diskretion in A'_2 eine nicht äquidistante Diskretion in A_2 entspricht.

Als letztes werden für beide Gebiete wie gewohnt die Koeffizienten der Differenzensterne in die einzelnen Gleichungssysteme eingesetzt und dann in ein einziges Gleichungssystem für das komplette Gebiet zusammengeführt.



7.2 Transformation

Wir gehen von der *Laplace*gleichung in Polarkoordinaten aus:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (36)$$

Nun wird wieder wie in 7.1 eine innere Ebene A_1 mit dem Radius \hat{r} und dem Koordinatenursprung im Zentrum definiert. Die äußere Ebene sei wieder A_2 mit $r > \hat{r}$. Um nun die Ebene mit den „offenen Randbedingungen“ (A_2) auf eine Ebene mit Randbedingungen abzubilden, muss die Variable r auf eine neue Variable R abgebildet (transformiert) werden:

$$R(r) = \frac{\hat{r}^2}{r} \quad \forall r > \hat{r} \quad (37)$$

Aus dieser Gleichung ist nun gut zu sehen, dass die komplette Ebene A_2 auf eine neue Ebene A_2' mit dem Radius \hat{r} , und $r = \infty$ in ihrem Zentrum, abgebildet wird. Wir sehen auch, dass der Rand erhalten bleibt:

$$R(\hat{r}) = \hat{r} \quad (38)$$

Der nächste Schritt ist die *Laplace*gleichung zu transformieren. Und zwar müssen wir diese in Abhängigkeit von R und α , anstatt r und α schreiben. Der Winkel α ändert sich übrigens nicht durch die Transformation, da der Winkel in A_2 und A_2' erhalten bleibt.

Wir betrachten also nur das folgende Differential und formen es mit der Kettenregel $(y(x(t)))' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ und der Gleichung (37) um:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{\partial U(R(r))}{\partial r} = \left(\frac{dR}{dr} \right) \cdot \frac{\partial U(R)}{\partial R} = - \left(\frac{R}{\hat{r}} \right)^2 \cdot \frac{\partial U(R)}{\partial R} \quad (39)$$

Als letztes substituieren wir die Gleichung (39) und (37) in (36):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{R}{\hat{r}^2} \frac{R^2}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(-\frac{\hat{r}^2}{R} \frac{R^2}{\hat{r}^2} \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{R^2}{\hat{r}^4} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{R^3}{\hat{r}^4} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{R^2}{\hat{r}^4} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0 \quad \left| \cdot \frac{\hat{r}^4}{R^4} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Wir sehen, dass die transformierte *Laplace*gleichung für die äußere Region genau die gleiche Form wie die Innere hat. Der einzige Unterschied ist, dass wir jetzt R anstelle von r schreiben.

7.3 Aufstellen eines allg. Gleichungssystems

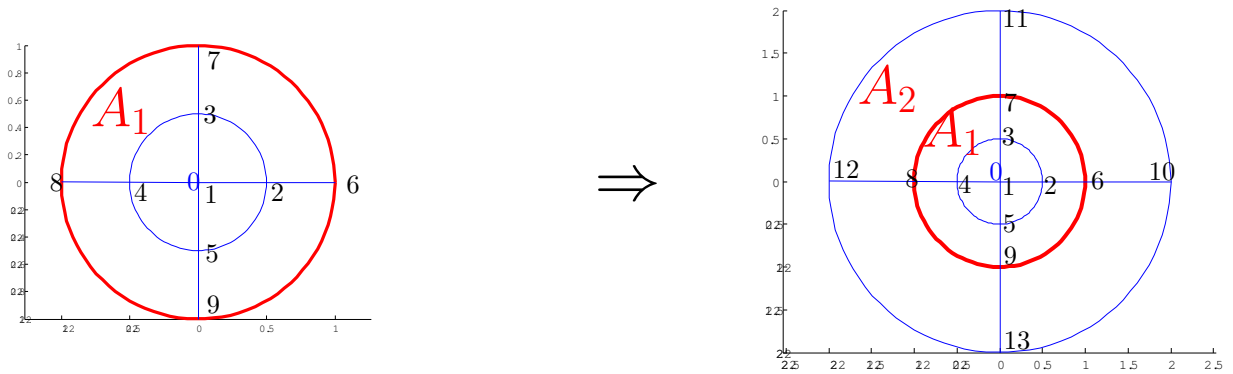
Wir wollen für ein Gitter in Polarkoordinaten das allgemeine Lösungssystem aufstellen, sodass wir später für beliebige Ladungsanordnungen, den Potentialverlauf berechnen können. Hierfür betrachten wir eine sehr grobe Gitterauflösung. Es werden folgende Vereinbarungen getroffen:

- alle Werte seien normiert
- $\hat{r} = 1$
- die radiale Gitterauflösung beträgt 3 (inklusive Rand und Ursprung)
- die azimutale Gitterauflösung beträgt 4
- die Diskretisierung sei äquidistant
- $h = \Delta\alpha = \text{konst.}$ $k = \Delta r$ bzw. $R = \text{konst.}$ r bzw. R = Radius des betrachteten Gitterpunktes
- alle Punkte werden gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert, angefangen im Ursprung



Abbildung 10: äquidistante Diskretisierung der beiden Gebiete

Unser Ziel ist es später, die beiden Lösungssysteme für die beiden Gebiete A_1 und A_2' in ein einziges Lösungssystem in A zusammenzufassen. Würden wir jetzt in die Gebiete A_1 und A_2' unseren Differenzenstern eintragen, und später die Gebiete zusammenführen, hätten wir ein Problem mit dem **Rand**, da wir für ihn keine Randbedingungen setzen können. Die einzige Vorgehensweise ist die Betrachtung des Randes in A_1 mit einem nicht äquidistanten Differenzenstern, der für die Gitterpunkte auf dem Rand schon auf das **nicht transformierte** Gebiet A_2 zugreift.

Abbildung 11: Erweiterung des Gebietes A_1 mit einer nicht äquidistanten Diskretisierung

7.4 Aufstellen der Differenzensterne

Für das Innere der Gebiete A_1 und A_2' können wir auf den schon hergeleiteten Differenzenstern in (33) zurückgreifen:

$$\begin{array}{c}
 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} \\
 | \\
 A_1 \Rightarrow \frac{2h^2 r^2 - h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} \quad \text{---} \quad -4 \quad \text{---} \quad \frac{2h^2 r^2 + h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} \\
 | \\
 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 2 \frac{k^2}{h^2 R^2 + k^2} \\
 | \\
 A_2' \Rightarrow \frac{2h^2 R^2 - h^2 R k}{h^2 R^2 + k^2} \quad \text{---} \quad -4 \quad \text{---} \quad \frac{2h^2 R^2 + h^2 R k}{h^2 R^2 + k^2} \\
 | \\
 2 \frac{k^2}{h^2 R^2 + k^2}
 \end{array}$$

Abbildung 12: Differenzensterne von A_1 und A_2'

Für den **Rand** ändert sich der rechte Koeffizient des Differenzensternes dahin, dass k nicht mehr konstant, sondern durch den Abstand der beiden Gitterpunkte r_6 und r_{10} definiert ist, wobei der erste radiale Gitterpunkt in A_2 , dem letzten radialen Gitterpunkt in A_2' vor dem Rand entspricht.

$$\partial A_1 \Rightarrow \frac{2h^2 r^2 - h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} \\ | \\ -4 \\ | \\ 2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \frac{2h^2 r^2 + h^2 r k'}{h^2 r^2 + k'^2} \quad \left(\text{mit } k' = r_{10} - r_6 = \frac{\hat{r}^2}{R_2} - r_6 \right)$$

Abbildung 13: Differenzenstern von ∂A_1

Wir erhalten somit die Erkenntnis, dass wenn wir im Gebiet A der Unendlichkeit entgegen streben, wir in A_2' dem Nullpunkt entgegenstreben. Dies ist bei der Zusammenführung der Gebiete für mehrere radiale Gitterpunkte ungemein wichtig. Außerdem vertauschen sich die linken und rechten Koeffizienten des Differenzensternes von A_2' bei der Zusammenführung. Die azimuthalen Koeffizienten bleiben unangetastet, und werden wie gewohnt übertragen.

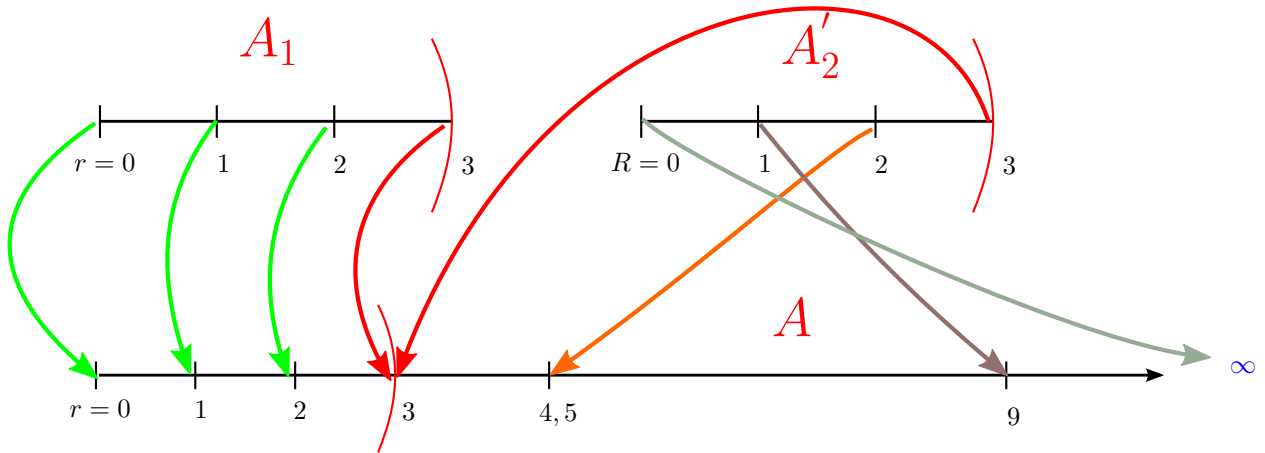


Abbildung 14: Zusammenführen der Gitterpunkte beider Gebiete (nur Radiale Betrachtung)

7.4.1 Aufstellen des Gleichungssystems für A_1

Merke: Für den Ursprung in A_1 versagt die FDM, und wir müssen uns der Finite-Integrale-Methode (FIM) behelfen, die jedoch für alle anderen Gitterpunkte die selben Koeffizienten liefert. Da wir hier die FIM nur auf den ersten Gitterpunkt anwenden, sei der „Koeffizientenstern“ hier als gegeben betrachtet. Der Zusammenhang der FDM und der FIM ist durch die *Maxwellschen* Gleichungen gegeben.

Die Erweiterung für mehrere azimuthale Gitterpunkte ist anschaulich, und denkbar einfach.

$$\begin{array}{c} \frac{\alpha(r_3) - \alpha(r_2)}{4} \\ | \\ \frac{\alpha(r_4) - \alpha(r_3)}{4} \quad \text{---} \quad - \sum (\text{benachbarte Koeff.}) \quad \text{---} \quad \frac{\alpha(r_2) - \alpha(r_5)}{4} \\ | \\ \frac{\alpha(r_5) - \alpha(r_4)}{4} \end{array}$$

Es werden nun Anschaulich die Koeffizienten (c_i) der einzelnen Gitterpunkte (i) eingetragen, wobei die Indizes o =oben, u =unten, l =links und r =rechts die jeweilige Orientierung im Differenzen- bzw. Koeffizientenstern angibt.

Merke: Alle Koeffizienten c'_i stammen von dem Differenzenstern mit nicht äquidistanter Diskretisierung bezüglich ∂A_1 (siehe 7.4).

Die Koeffizienten der letzten 4 Zeilen bleiben leer, da diese in der Koeffizienten Matrix von A'_2 schon gesetzt werden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_r & c_o & c_l & c_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & c_2 & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & c_u & c_3 & c_o & 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & 0 & c_u & c_4 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & c_o & 0 & c_u & c_5 & 0 & 0 & 0 & c_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c'_l & 0 & 0 & 0 & c'_6 & c'_o & 0 & c'_u & c'_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_r & 0 & 0 & c_u & c'_7 & c'_o & 0 & 0 & c'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'_l & 0 & 0 & c_u & c_8 & c'_o & 0 & 0 & c'_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c'_l & c'_o & 0 & c'_u & c_9 & 0 & 0 & c'_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1}$$

7.4.2 Aufstellen des Gleichungssystems für A'_2

Die Betrachtung des Ursprungs fällt hier raus, da dieser als Randbedingung gesetzt werden kann.

Die Koeffizienten C_i der einzelnen Gitterpunkte (i) werden exakt wie zuvor eingetragen.

Die 4 letzten Spalten werden hier leer gelassen, da diese den Rand darstellen, dieser wird jedoch schon in dem vorherigen Gleichungssystem betrachtet.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & C_o & 0 & C_u & C_r & 0 & 0 & 0 \\ C_u & C_3 & C_o & 0 & 0 & C_l & 0 & 0 \\ 0 & C_u & C_4 & C_o & 0 & 0 & C_r & 0 \\ C_o & 0 & C_u & C_5 & 0 & 0 & 0 & C_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}'_2} \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} Q_2 - C_l \cdot 0 \\ Q_3 - C_l \cdot 0 \\ Q_4 - C_l \cdot 0 \\ Q_5 - C_l \cdot 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_2}$$

7.4.3 Zusammenführen der beiden Gleichungssysteme

Es sei hier noch einmal erwähnt, dass gerade für dieses einfache Beispiel, die Gegenläufigkeit der beiden Gebiete A und A'_2 wegfällt. Würde man man den allgemeinen Fall für beliebig feine Gitter programmieren, muss dieses auf jeden Fall, beim Zusammenführen der Matrizen beachtet werden. Ein Zusammenhang der Gitterpunkte für ein feineres Gitter sei nochmal im folgenden Bild erklärt.

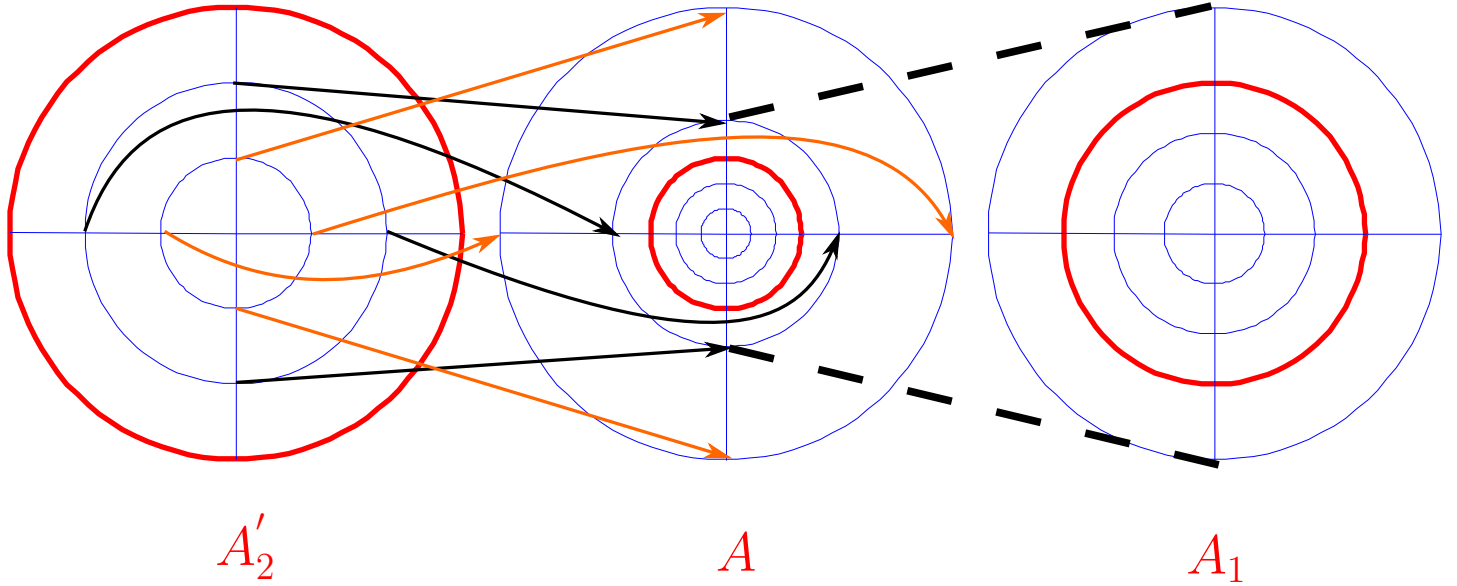


Abbildung 15: Zusammenhang der Gitterpunkte für feinere Gitter

Mit diesem Wissen können wir jetzt die beiden Gleichungssysteme zu einem einzigen zusammenfassen. Dabei bleibt die Matrix \mathbf{A}_1 unangetastet, da diese ja nicht verändert wurde. Nur bei der Matrix \mathbf{A}_2 muss auf die Gegenläufigkeit und die Vertauschung der linken und rechten Koeffizienten geachtet werden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_r & c_o & c_l & c_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & c_2 & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & c_u & c_3 & c_o & 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & 0 & c_u & c_4 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_l & c_o & 0 & c_u & c_5 & 0 & 0 & 0 & c_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_l & 0 & 0 & 0 & c_6 & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & c_u & c_7 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & c_u & c_8 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_l & c_o & 0 & c_u & c_9 & 0 & 0 & 0 & c_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_r & 0 & 0 & 0 & C_2 & C_o & 0 & C_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_r & 0 & 0 & C_u & C_3 & C_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_r & 0 & 0 & C_u & C_4 & C_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_r & C_o & 0 & C_u & C_5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

7.5 Résumé

Das besondere an der Kelvintransformation ist die Tatsache, dass die *Laplace*gleichung bei der Transformation unangetastet bleibt, und nur die Gegenläufigkeit der Gebiete beachtet werden muss.

Mittels diesem Gleichungssystem, ist es möglich, den Potentialverlauf einer oder mehrerer Ladungen im freien Raum zu berechnen, was vorher nicht möglich war, da uns eine Randbedingung gefehlt hat.

Da das vorherige Beispiel jedoch ein sehr grobes Gitter besitzt, ist es für eine Berechnung denkbar ungeeignet. Für repräsentative Beispiele ist ein Gitterauflösung von 100 radialen und 100 azimuthalen Gitterpunkten weitaus sinnvoller. Dies würde einem Gleichungssystem mit 19701 Unbekannten entsprechen, was nur noch mit Hilfe von Computern berechnet werden kann.

7.5.1 Beispiel mit Matlab

- Radiale Auflösung: 100
- azimuthale Auflösung: 100
- Raumladungen:
 - Gitterpunkt: 1 (Ursprung) , Wert: -6
 - Gitterpunkt: 8252 (Bereich A_1) , Wert: 6
 - Gitterpunkt: 17877 (Bereich A_2) , Wert: -2

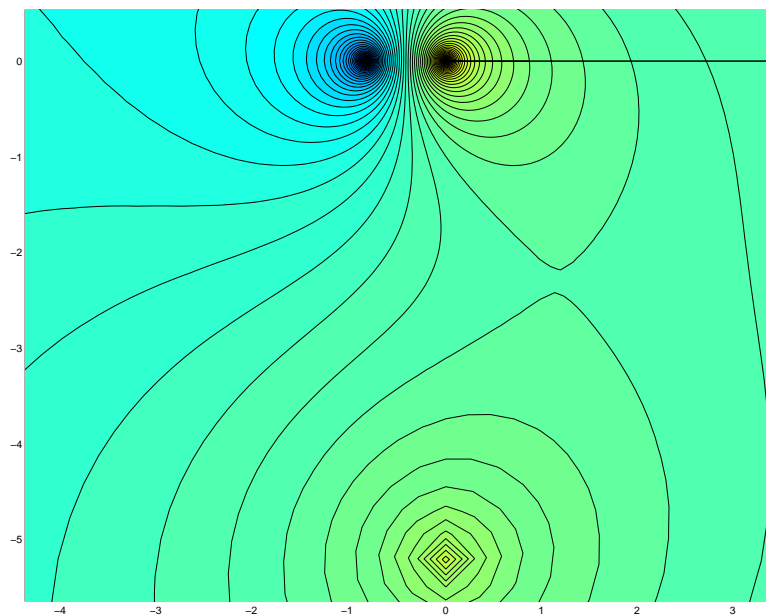


Abbildung 16: Äquipotentiallinien der Ladungen

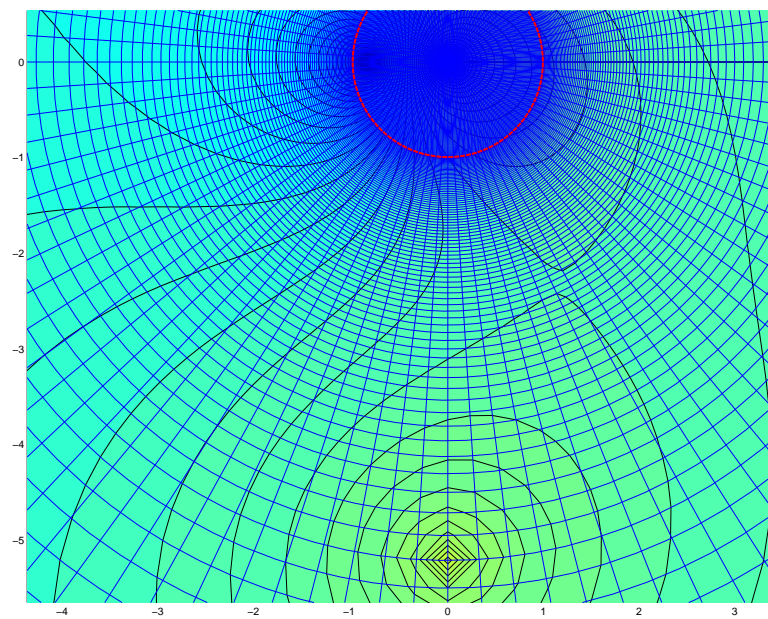
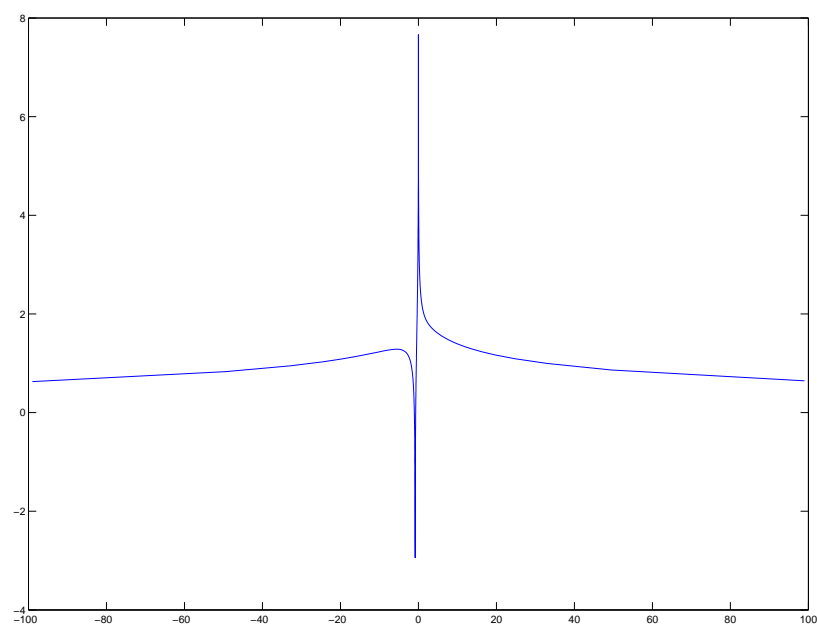


Abbildung 17: Äquipotentiallinien der Ladungen mit Differenzengitter

Abbildung 18: Potentialverlauf auf der x -Achse bei $y = 0$

8 Quellenangabe

1. **Elektromagnetische Felder** Theorie und Anwendung [Heino Henke]
2. **IMA Journal of Applied Mathematics** (2008) 1-12 [GEORGE DASSIOS]
3. **Einführung in die Vektoranalysis** [Eckard Specht] [www.matheplanet.com]
4. **Feldtheorie und Theoretische Elektrotechnik** [Prof. Dr.-Ing. Rolf Schuhmann]
5. **Finite Element Method Magnetics** [David Meeker]