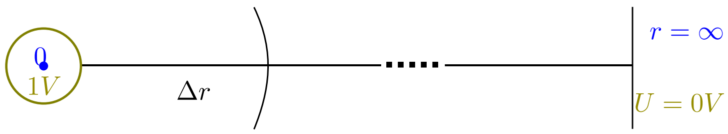
Offene Randbedingungen für Feldprobleme auf Basis von Koordinatentransformationen

In den meisten Fällen können wir die numerischen Gleichungssysteme lösen, da wir gegebene Randbedingungen haben. Was soll man aber machen wenn man keine Randbedingungen einsetzen kann?
Als Beispiel sei hier eine Sphäre gegeben, deren Randbedingung wir zumindest an der Oberfläche ermitteln können (1V). Nun wollen wir aber anhand numerischer Berechnungen erfahren, wie sich das Potentialfeld ins Unendliche ausdehnt. Zwar können wir die Randbedingung für $r = \infty$ bestimmen: „$U(r = \infty) = 0V$“, doch können wir diese nirgends einsetzen.
Mit äqudistanter und selbst mit nicht äquidistanter Diskretion kann der Punkt $r = \infty$ nicht erreicht werden.



Um dieses Missgeschick zu umgehen, bietet sich hier die *Kelvin*transformation an. Die Idee dahinter ist die folgende: Es ist ein Gebiet $A \subseteq \mathbf{R}^2$ gegeben. Nun wird A in zwei Teilgebiete A_1 und A_2 unterteilt ($A_1, A_2 \subset A$), wobei A_1 eine Kreisscheibe mit dem Radius $\hat{r}$ und den Nullpunkt als Zentrum ist, A_2 ist entsprechend $A_2 = A \setminus A_1$, also das äußere Gebiet (Anschaulich: Eine unendlich große Kreisscheibe mit einem Loch). Nun wird A_2 mittels der *Kelvin*transformation zu $A_2^{'}$ transformiert. Diese neue Gebiet $A_2^{'}$ stellt nun wieder eine geschlossene Kreisscheibe dar. Diese hat den Radius $\hat{r}$ wobei hier das Zentrum der Kreisscheibe die Unendlichkeit darstellt. Es gilt außerdem $\partial A_1 = \partial A_2^{'} = \partial A_2$, dass heißt der Rand und seine Werte bleiben bei der Transformation erhalten.
Nun kann man ein Gitter in $A_2^{'}$ legen, welches als Randbedingung $r = \infty$ mit einschließt und dessen Potential wir in den Quellvektor eintragen können. Zu beachten ist, das eine äquidistante Diskretion in $A_2^{'}$ eine nicht äquidistante Diskretion in A_2 entspricht.
Als letztes werden für beide Gebiete wie gewohnt die Koeffizienten der Differenzensterne in die einzelnen Gleichungssysteme eingesetzt und dann in ein einziges Gleichungssystem für das komplette Gebiet zusammengeführt.
Es ist folgendes zu beachten: Wenn man im Gebiet A der Unendlichkeit entgegen strebt, strebt man in $A_2^{'}$ dem Nullpunkt entgegen. Dies ist bei der Zusammenführung der Gebiete für mehrere radiale Gitterpunkte ungemein wichtig. Außerdem vertauschen sich die linken und rechten Koeffizienten des Differenzensternes von $A_2^{'}$ bei der Zusammenführung. Die azimutalen Koeffizienten bleiben unangetastet, und werden wie gewohnt übertragen.

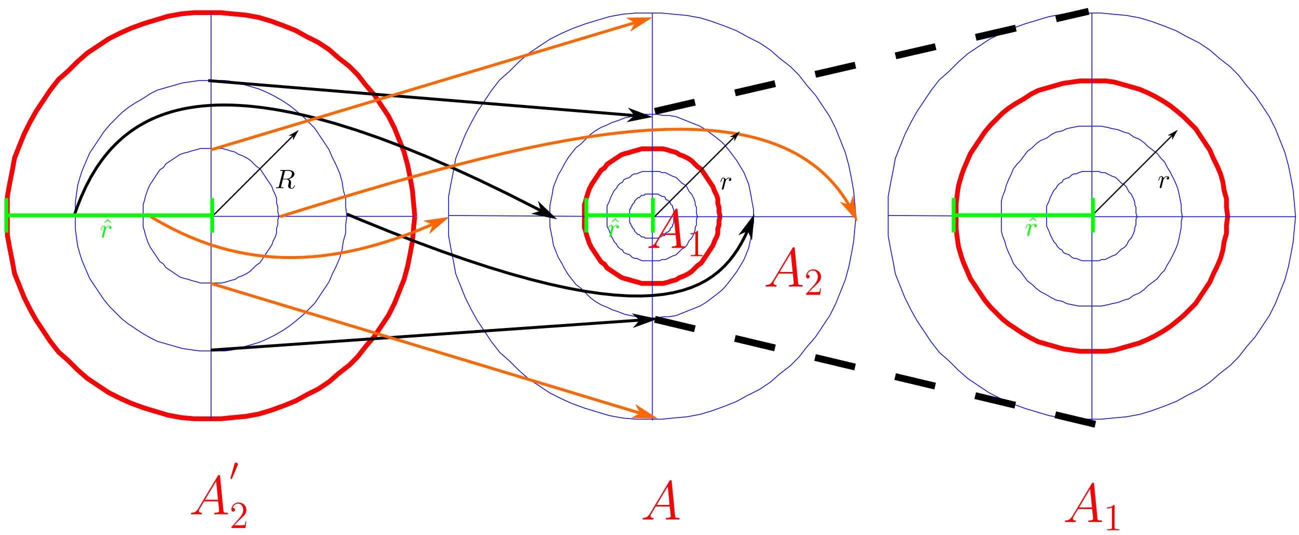


Abbildung 1: Zusammenhang der Gitterpunkte

korthals@mail.uni-paderborn.de

Die Kelvin-Transformation

Wir gehen von der *Laplace*gleichung in Polarkoordinaten aus, wobei $u(r,\alpha)$ eine Fkt. in A ist:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \tag{1}$$

Nun wird wieder wie in Abbildung 1 eine innere Ebene A_1 mit dem Radius $\hat{r}$ und dem Koordinatenursprung im Zentrum definiert. Die äußere Ebene sei wieder A_2 mit $r \geq \hat{r}$. Um nun die Ebene mit den „offenen Randbedingungen“(A_2) auf eine Ebene mit Randbedingungen abzubilden, muss die Variable r auf eine neue Variable R abgebildet (transformiert) werden:

$$R(r) = \frac{\hat{r}^2}{r} \qquad \forall r \geq \hat{r} \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung ist nun gut zu sehen, dass die komplette Ebene A_2 auf eine neue Ebene $A_2^{'}$ mit dem Radius $\hat{r}$, und $r = \infty$ in ihrem Zentrum, abgebildet wird. Wir sehen auch, das der Rand erhalten bleibt:

$$R(\hat{r}) = \hat{r} \tag{3}$$

Der nächste Schritt ist die *Laplace*gleichung zu transformieren. Und zwar müssen wir diese in Abhängigkeit von R und α, anstatt r und α schreiben. Der Winkel α ändert sich übrigens nicht durch die Transformation, da der Winkel in A_2 und $A_2^{'}$ erhalten bleibt.
Wir betrachten also nur das folgende Differenzial und formen es mit der Kettenregel$(y(x(t))^{'} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt})$ und der Gleichung (2) um:

$$\frac{\partial u(r)}{\partial r} = \frac{\partial u(R(r))}{\partial r} = \left(\frac{dR}{dr}\right)\cdot\frac{\partial u(R)}{\partial R} = -\left(\frac{R}{\hat{r}}\right)^2\cdot\frac{\partial u(R)}{\partial R} \tag{4}$$

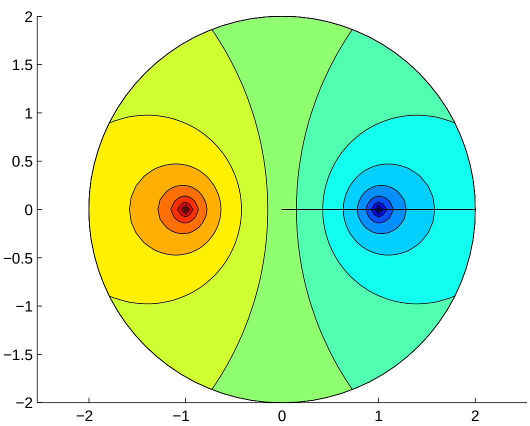
Als letztes substituieren wir die Gleichung (4) und (2) in (1):

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}\left(r\tfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -\tfrac{R}{\hat{r}^2}\tfrac{R^2}{\hat{r}^2}\tfrac{\partial}{\partial R}\left(-\tfrac{\hat{r}^2}{R}\tfrac{R^2}{\hat{r}^2}\tfrac{\partial u}{\partial R}\right) + \tfrac{R^2}{\hat{r}^4}\tfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{R^3}{\hat{r}^4}\tfrac{\partial}{\partial R}\left(R\tfrac{\partial u}{\partial R}\right) + \tfrac{R^2}{\hat{r}^4}\tfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \qquad \cdot\left|\tfrac{\hat{r}^4}{R^4}\right. \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial R}\left(R\tfrac{\partial u}{\partial R}\right) + \tfrac{1}{R^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

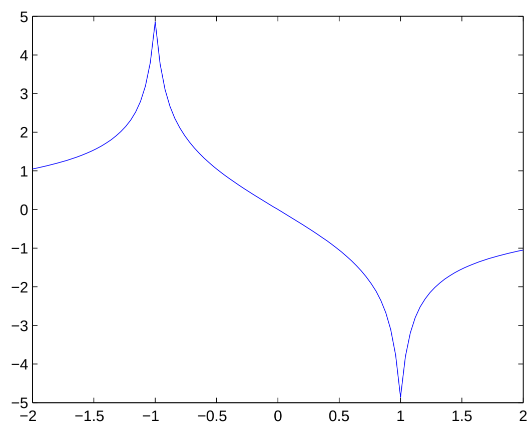
Wir sehen, dass die transformierte *Laplace*gleichung für die äußere Region genau die gleiche Form wie die Innere hat. Der einzige Unterschied ist, das wir jetzt R anstelle von r schreiben.

Beispiel mit Matlab

- Gebiet A_1
- Radiale Auflösung: 51
- azimutale Auflsg.: 80
- Radius: 2
- Ladungen:
  - $+Q$ bei $x = 1, y = 0$
  - $-Q$ bei $x = -1, y = 0$



(a) u(x,y)



(b) u(x,y=0)

korthals@mail.uni-paderborn.de