

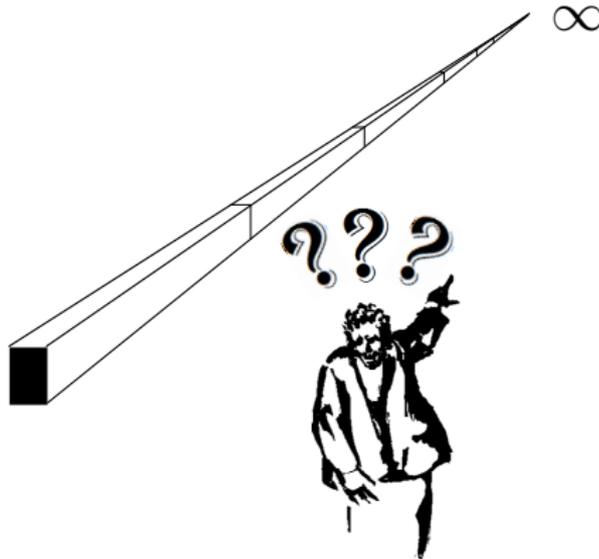
Offene Randbedingungen für Feldprobleme auf Basis von Koordinatentransformationen

Timo Korthals
korthals@mail.uni-paderborn.de

9. Februar 2009

Was tun ohne Randbedingungen...

...aber mit dem Wissen $f(x \rightarrow \infty) = 0$?



Grundlagen

Felder in der Elektrotechnik

Mathematische Grundlagen

Maxwellsche Gleichung

Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik

Numerik

Warum Numerik?

Finite Differenzen Methode (FDM)

Beispiel an einem Koaxialkabel

Die Kelvin-Transformation

Grundlegendes

Transformation des Gebietes

Aufstellung eines allg. Gleichungssystems

Fazit

Grundlagen

Felder in der Elektrotechnik

Mathematische Grundlagen

Maxwellsche Gleichung

Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik

Numerik

Warum Numerik?

Finite Differenzen Methode (FDM)

Beispiel an einem Koaxialkabel

Die Kelvin-Transformation

Grundlegendes

Transformation des Gebietes

Aufstellung eines allg. Gleichungssystems

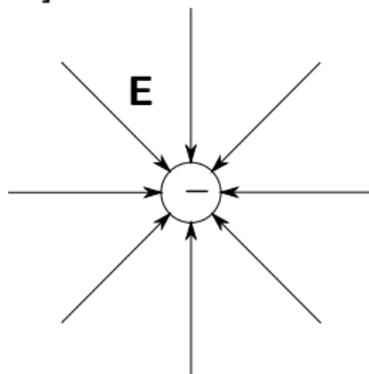
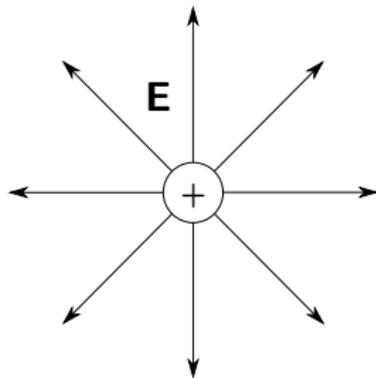
Fazit

Feldarten

- ▶ Skalarfeld
 - ▶ $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$
 - ▶ Bsp.: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$
 - ▶ Temperatur-, Potentialfeld (ϕ)
 - ▶ jedem Punkt im Raum ist ein Wert zugeordnet
- ▶ Vektorfeld
 - ▶ $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$
 - ▶ Bsp.: $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$
 - ▶ Kraft-, \mathbf{E} -Feld
 - ▶ jedem Punkt im Raum ist ein Vektor zugeordnet

Elektrostatik

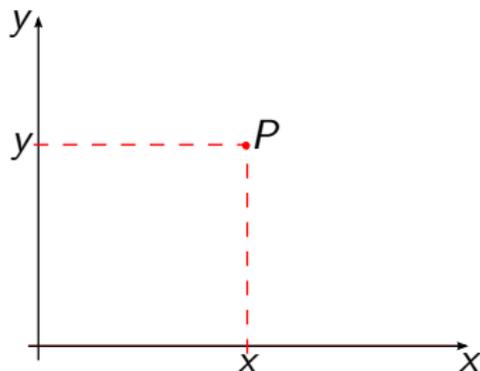
E: Elektrisches Feld, Einheit: $[V/m]$



Koordinatensysteme in 2D

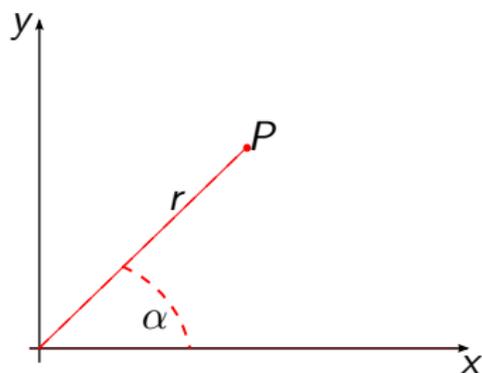
- ▶ Betrachtung in 2D für unsere Problemstellung ausreichend
- ▶ Kartesisches Koordinatensystem (allg. bekannt)
- ▶ Polar Koordinatensystem
 - ▶ vereinfacht viele Problemstellungen in der Elektrotechnik
 - ▶ z.B.: radial-symmetrische Felder

Kartesisch



$$P = (x, y)$$

Polar



$$P = r \angle \alpha$$

x

\rightarrow

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\alpha = \text{atan2}(y/x)$$

$$x = r \cdot \cos(\alpha)$$

\leftarrow

r

$$y = r \cdot \sin(\alpha)$$

α

∇ , grad, div und Δ

Definition des Nabla-Operator:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Gradient:

$$\text{grad} f = \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Divergenz:

$$\text{div} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F} := \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

Laplace-Operator Δ :

$$\Delta f := \text{div}(\text{grad} f) = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Die Laplacegleichung in Polarkoordinaten...

... vereinfacht viele Rechnungen

Kartesische Koordinaten

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

\Leftrightarrow

Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\end{aligned}$$

$$\text{Bsp.: } u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow u(r, \alpha) = r$$

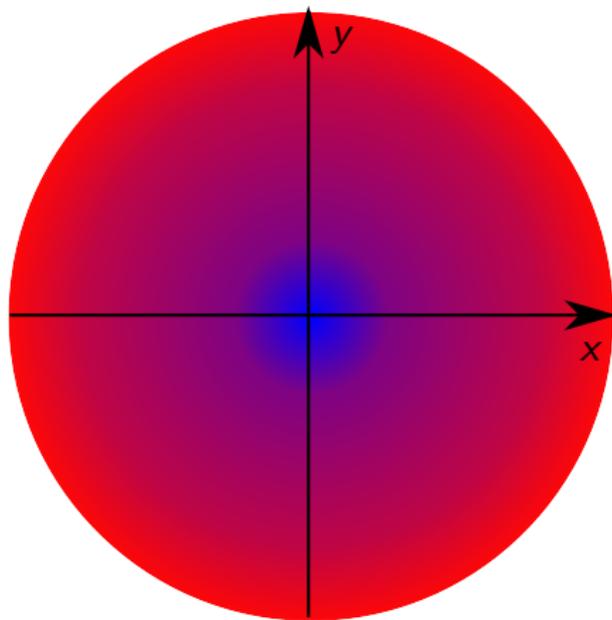


Abbildung: Radialer Funktionsverlauf

$$\text{Bsp.: } u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow u(r, \alpha) = r$$

Kartesische Koordinaten

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} + \frac{\frac{y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow = \frac{1}{r}$$

Polarkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(x, y)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \alpha^2}$$

$$= \frac{1}{r} + 0$$

Merke: Die beiden Funktionen sind für eingesetzte Werte gleich.

Maxwellsche Gleichung in diff. & integraler Form

Merke: ρ : Raumladungsdichte, ∂V : Rand eines Volumens, Q : freie Ladung,
 ϵ_0 : Permittivität des Vakuums

differentielle Form

Verknüpfung

Integralform

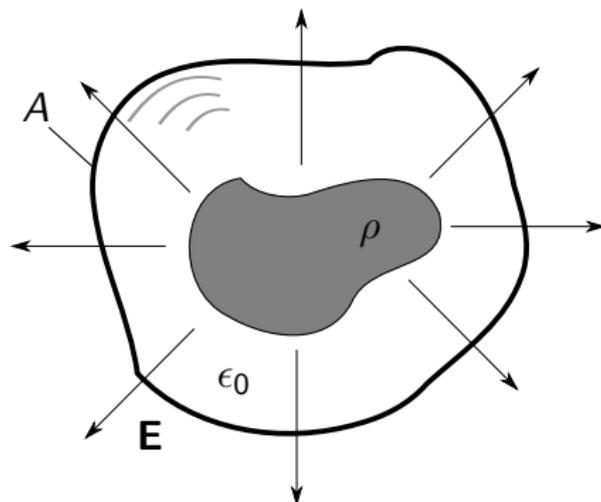
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Gauß
↔

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Erläuterung zur Integralform

Das \mathbf{E} -Feld ist ein Quellenfeld



Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik

$$\text{Es gilt } \mathbf{E} = -\nabla u$$

So folgt für das Vakuum:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla(\nabla u) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

bzw. die *Poissongleichung* mit:

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Und für den quellenfreien Raum die *Laplacegleichung* mit:

$$\Delta u = 0$$

Grundlagen

Felder in der Elektrotechnik

Mathematische Grundlagen

Maxwellsche Gleichung

Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik

Numerik

Warum Numerik?

Finite Differenzen Methode (FDM)

Beispiel an einem Koaxialkabel

Die Kelvin-Transformation

Grundlegendes

Transformation des Gebietes

Aufstellung eines allg. Gleichungssystems

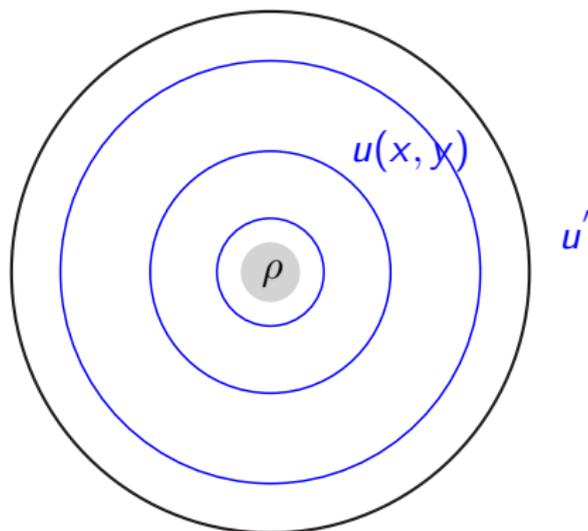
Fazit

▶ **Warum Numerik?**

- ▶ analytische Lösungen nur in sehr speziellen Fällen möglich
- ▶ geringere Kosten bei der Entwicklungen durch numerische Simulation
- ▶ sehr realitätsnahe Lösungen (Rechnerkapazitätsabhängig)
- ▶ Modellkomplexität beliebig erweiterbar

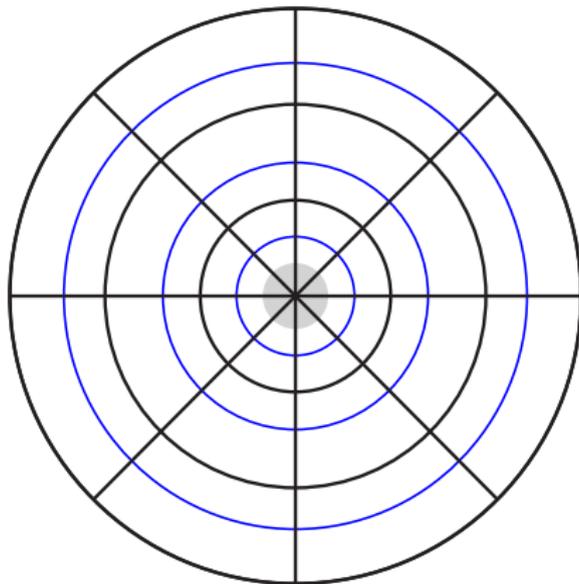
FDM: Vorgehensweise

Es gelte $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$



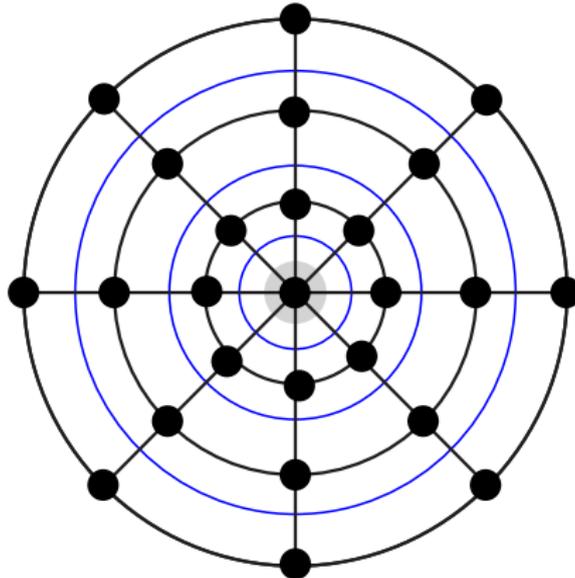
FDM: Vorgehensweise

Es gelte $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$



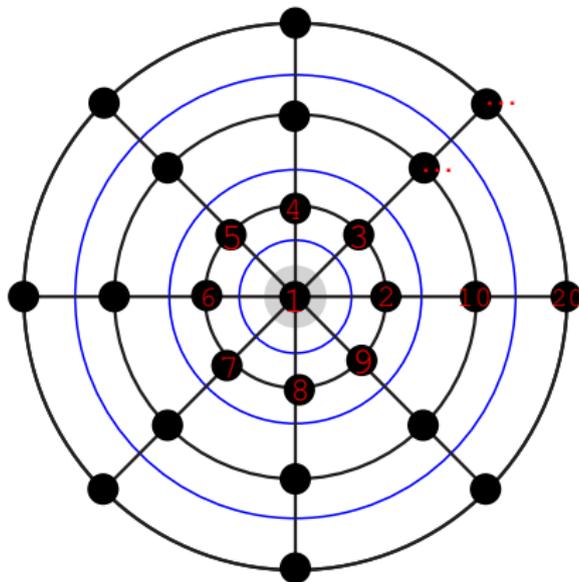
FDM: Vorgehensweise

Es gelte $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$ Differenzen



FDM: Vorgehensweise

Es gelte $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$ Differenzen



Differentialgl. \Rightarrow Differenzen

Merke: Δ sei hier nicht der *Laplaceoperator*, sondern eine nicht infinitesimale Differenz.

Darstellung der Funktion durch eine Taylorreihe:

Vorwärtsdifferenzieren:

$$f(x_0 + \Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \cdot f(x_0)^{(n)} = f(x_0) + \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{\Delta^n}{n!} f^n(x_0) \quad (1)$$

Rückwärtsdifferenzieren:

$$f(x_0 - \Delta) = f(x_0) - \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x_0) - \dots \quad (2)$$

Differentialgl. \Rightarrow Differenzen

$$((1) - (2))/2\Delta$$

$$f(x_0)' \approx \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0 - \Delta)}{2\Delta} \quad (3)$$

$$((1) + (2))/\Delta^2$$

$$f(x_0)'' \approx \frac{f(x_0 + \Delta) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta)}{\Delta^2} \quad (4)$$

Die Approximation wird umso genauer, desto feiner das Rechengitter, oder entsprechend Δ ist.

Einsetzen in ein Gl.-system

Beispiel an einer einfachen Funktion $f(x)$:

- ▶ Aufgabe: Ermittle den Funktionsverlauf
- ▶ Es gelte die *Laplace*gleichung (2te Ableitung verschwindet)
- ▶ $f(10) = 0$, $f(15) = 5$
- ▶ Durch Raten: $f(x) = x - 10$

Aufstellen der Differenzengitters:

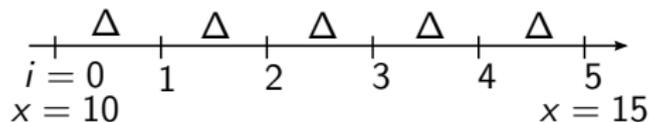
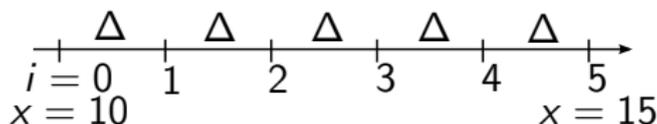


Abbildung: Gitter mit $\Delta = 1$



mittels Approx. für die 2te Ableitung und der Bedingung $f'' = 0$:

$$f(x_0)'' \approx \frac{f(x_0+\Delta) - 2f(x_0) + f(x_0-\Delta)}{\Delta^2} \Rightarrow 0 \approx f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

Koeffizienten des betrachteten Punktes i :

$$f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \Rightarrow 1 \text{---} - 2 \text{---} 1$$

5.-6. Einsetzen in ein Gl.-system

4 Unbekannte \Rightarrow 4 Gleichungen

- ▶ Aufstellen eines Gl.-Systemes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- ▶ Differenzenstern: 1— — — 2— — — 1

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'' \Delta^2 - f_0 \\ f_2'' \Delta^2 \\ f_3'' \Delta^2 \\ f_4'' \Delta^2 - f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die beiden Funktionswerte f_0 und f_5 stellen die Randwerte dar.

6. Lösen des Gl.-system

Wir multiplizieren jetzt das Gleichungssystem von links mit der Inversen von **A** und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0,8 & -0,6 & -0,4 & -0,2 \\ -0,6 & -1,2 & -0,8 & -0,4 \\ -0,4 & -0,8 & -1,2 & -0,6 \\ -0,2 & -0,4 & -0,6 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(11) \\ f(12) \\ f(13) \\ f(14) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist noch zu bemerken, dass die FDM für Funktionen bis zweiten Grades exakte Werte ermittelt.

Aufgabenstellung: Koax.-Kabel

Ermittle den Potentialverlauf zwischen den Flächen.

$$r_i = 1$$

$$r_a = 3$$

$$\Delta r = 1$$

$$\Delta \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow N_\alpha = 8$$

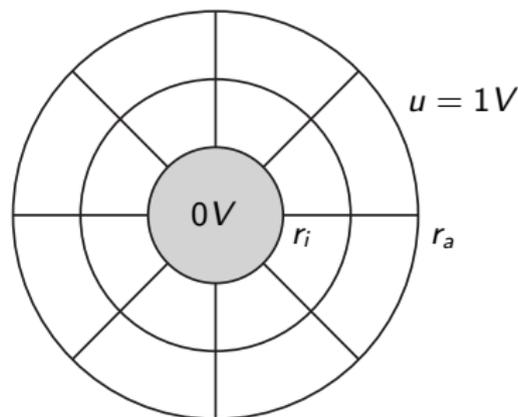


Abbildung: Querschnitt eines Koaxialkabels

Nummerierung der Gitterpkt.

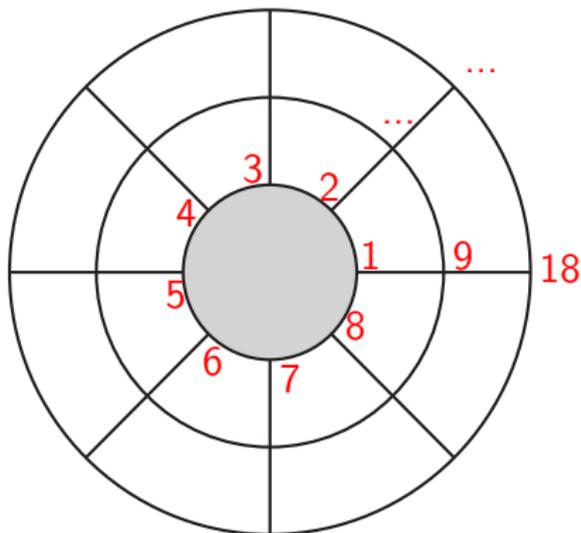


Abbildung: Nummerierung der Gitterpkt.

FDM in Polarkoordinaten

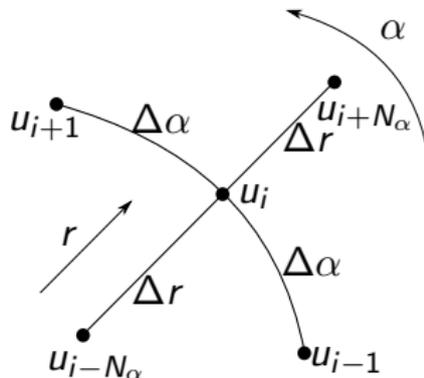


Abbildung: Betrachtung eines Gitterpkt. u_i

Vereinbarungen:

- ▶ $h := \Delta\alpha = \textit{konst.}$
- ▶ $k := \Delta r = \textit{konst.}$
- ▶ $r := \text{Radius des betrachteten Gitterpunktes } u_i$

Wir erhalten nun durch Vor- und Rückwärtsdiff. folgende Taylorreihen:

$$u_{i-1} = u_i - hu_{i,\alpha} + \frac{h^2}{2} u_{i,\alpha\alpha} - \dots \quad (5)$$

$$u_{i+1} = u_i + hu_{i,\alpha} + \frac{h^2}{2} u_{i,\alpha\alpha} + \dots \quad (6)$$

$$u_{i+N_\alpha} = u_i + ku_{i,r} + \frac{h^2}{2} u_{i,rr} + \dots \quad (7)$$

$$u_{i-N_\alpha} = u_i - ku_{i,r} + \frac{h^2}{2} u_{i,rr} - \dots \quad (8)$$

Und nun durch Umstellen der Gleichungen:

$$u_{i,rr} \approx \frac{u_{i+N_\alpha} - 2u_0 + u_{i-N_\alpha}}{k^2}, \quad u_{i,r} \approx \frac{u_{i+N_\alpha} - u_{i-N_\alpha}}{2k}, \quad u_{i,\alpha\alpha} \approx \frac{u_{i-1} - 2u_0 + u_{i+1}}{h^2}$$

Einsetzen in die Laplacegleichung:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \\
 &\approx \frac{u_{i+N_\alpha} - 2u_0 + u_{i-N_\alpha}}{k^2} + \frac{1}{r} \frac{u_{i+N_\alpha} - u_{i-N_\alpha}}{2k} + \frac{1}{r^2} \frac{u_{i-1} - 2u_0 + u_{i+1}}{h^2} \\
 &= \underbrace{-4}_{C_j} u_i + \underbrace{2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2}}_{C_u} u_{i-1} + \underbrace{2 \frac{k^2}{h^2 r^2 + k^2}}_{C_o} u_{i+1} + \underbrace{\frac{2h^2 r^2 + h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2}}_{C_r} u_{i+N_\alpha} + \underbrace{\frac{2h^2 r^2 - h^2 r k}{h^2 r^2 + k^2}}_{C_l} u_{i-N_\alpha}
 \end{aligned}$$

Koeffizienten im Differenzenstern:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_o & & \\
 & & | & & \\
 C_l & \text{---} & C_j & \text{---} & C_r \\
 & & | & & \\
 & & C_u & &
 \end{array} \tag{9}$$

Problemstellung ist rotationssymmetrisch:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (10)$$

Neuer Differenzenstern:

$$2 - \frac{k}{r} \quad \text{---} \quad -4 \quad \text{---} \quad 2 + \frac{k}{r} \quad (11)$$

Referenzfunktion:

Ansatz: $a \cdot \log r + b$ ist eine Lösung der Laplacegleichung ($a, b \in \mathbf{R}$)

Ermitteln der Konstanten:

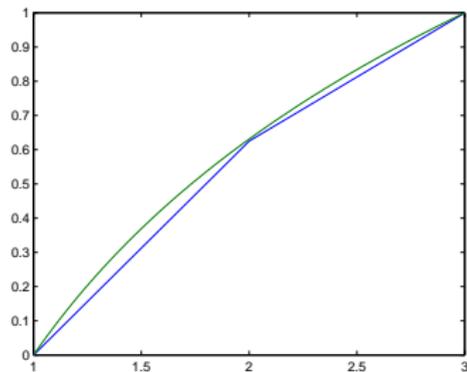
$$u(r=1) = 0 = a \cdot \log 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$u(r=3) = 1 = a \cdot \log 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\log 3}$$

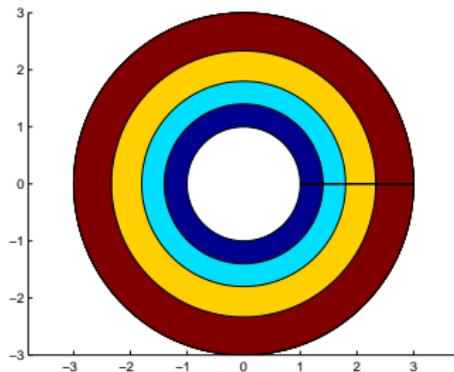
Einsetzen in den Ansatz: $\Rightarrow u(r) = \frac{1}{\log 3} \log r$

Lösung mit Matlab

Gitterpunkte zwischen den Rändern: 1



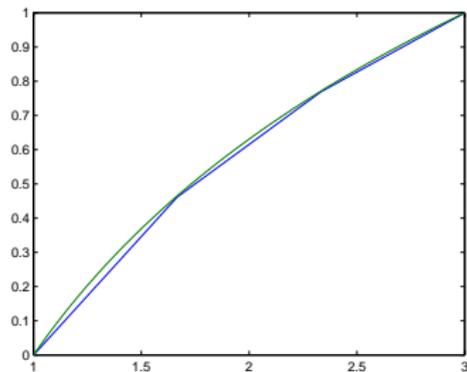
$u(r)$



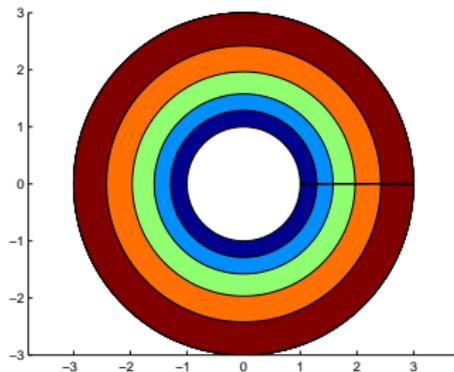
$u(x,y)$

Lösung mit Matlab

Gitterpunkte zwischen den Rändern: 2



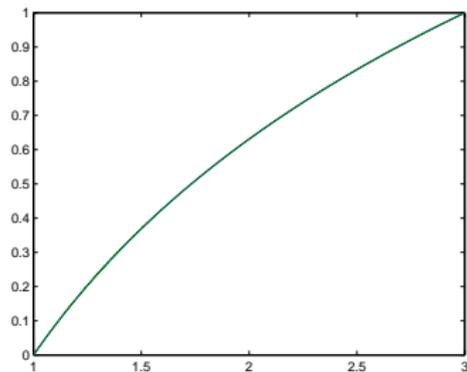
$u(r)$



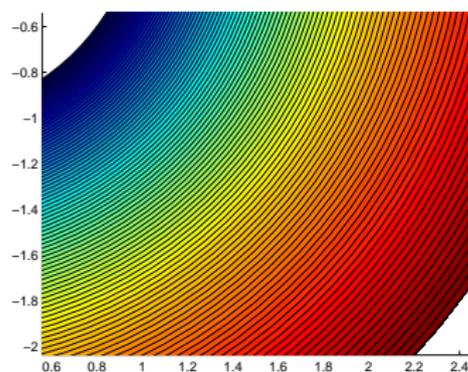
$u(x, y)$

Lösung mit Matlab

Gitterpunkte zwischen den Rändern: 100



$u(r)$



$u(x, y)$

Grundlagen

Felder in der Elektrotechnik

Mathematische Grundlagen

Maxwellsche Gleichung

Laplace-, Poisson-Gleichung in der Elektrotechnik

Numerik

Warum Numerik?

Finite Differenzen Methode (FDM)

Beispiel an einem Koaxialkabel

Die Kelvin-Transformation

Grundlegendes

Transformation des Gebietes

Aufstellung eines allg. Gleichungssystems

Fazit

Was machen, ohne Randbedingungen...

...aber mit dem Wissen, dass für $r \rightarrow \infty$ die Funktion verschwindet?



Es kann auf konventionellem Wege kein Gleichungssys. mit der Randbedingung $u(r = \infty) = 0$ aufgestellt werden.

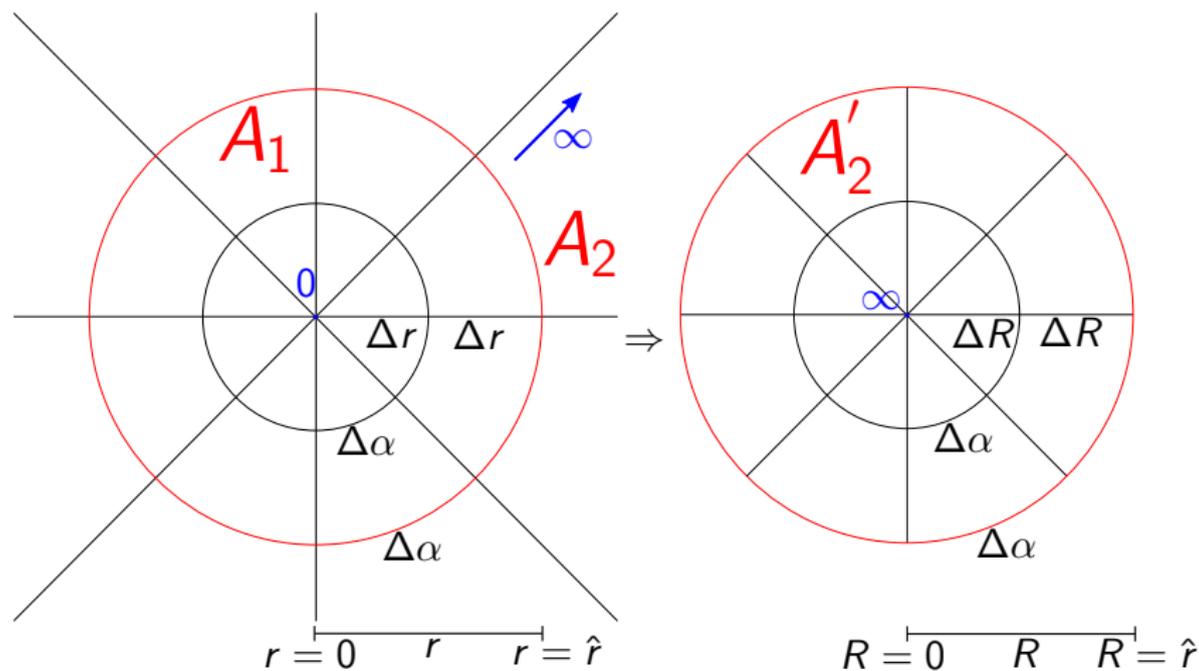
Idee der Kelvintransformation

Unterteilung des kompletten Gebietes A in 2 Gebiete

- ▶ A_1
 - ▶ geschlossene innere Kreisscheibe
 - ▶ Radius \hat{r}
 - ▶ enthält Koordinatenursprung
- ▶ A_2
 - ▶ anschaulich: unendlich große Kreisscheibe mit einem Loch
- ▶ A_2 zu A'_2 transformieren

$$R(r) = \frac{\hat{r}^2}{r} \quad \forall r \geq \hat{r}$$

Idee der Kelvintransformation



Definition der Gebiete

- ▶ $A_1 = \{(r, \alpha) \mid 0 \leq r \leq \hat{r}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$
- ▶ $A_2 = \{(r, \alpha) \mid \hat{r} \leq r \leq \infty, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$

Definieren eines neuen Radius für A'_2 aus A_2 :

$$R(r) = \frac{\hat{r}^2}{r} \quad \forall r \geq \hat{r}$$

- ▶ $A'_2 = \{(R, \alpha) \mid 0 \leq R \leq \hat{r}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$

Merke: Der Winkel α wird nicht transformiert, und bleibt in jedem Gebiet erhalten.

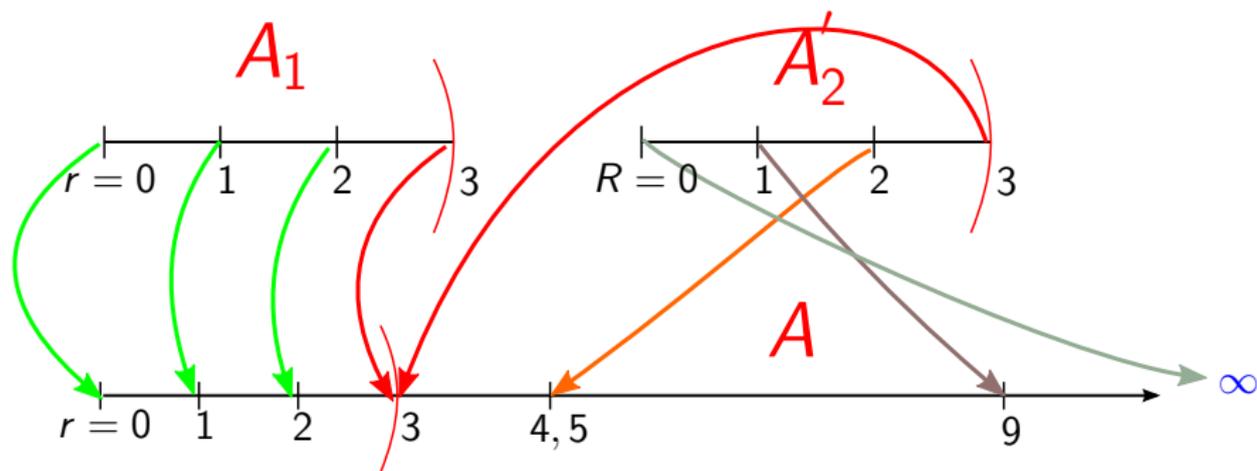


Abbildung: Beziehungen der radialen Gitterpunkte

Transformation der Laplacegleichung

Laplacegleichung in Polarkoordinaten:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$$

Aufgabe: Laplacegl. in Abhängigkeit von R und α :

Kettenregel: $(y(x(t)))' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, $R(r) = \frac{\hat{r}^2}{r}$, $r(R) = \frac{\hat{r}^2}{R}$:

$$\frac{\partial u(r)}{\partial r} = \frac{\partial u(R(r))}{\partial r} = \left(\frac{dR}{dr} \right) \cdot \frac{\partial u(R)}{\partial R} = - \left(\frac{\hat{r}^2}{r^2} \right) \cdot \frac{\partial u(R)}{\partial R} = - \left(\frac{R}{\hat{r}} \right)^2 \cdot \frac{\partial u(R)}{\partial R}$$

Transformation der Laplacegleichung

Substitution der Laplacegl. mittels:

$$[1]: r(R) = \frac{\hat{r}^2}{R} \quad , \quad [2]: \frac{\partial u(r)}{\partial r} = - \left(\frac{R}{\hat{r}}\right)^2 \cdot \frac{\partial u(R)}{\partial R}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 && \quad |[1] \\ \Leftrightarrow & \frac{R}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{r}^2}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{R^2}{\hat{r}^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 && \quad |[2] \\ \Leftrightarrow & -\frac{R}{\hat{r}^2} \frac{R^2}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(-\frac{\hat{r}^2}{R} \frac{R^2}{\hat{r}^2} \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{R^2}{\hat{r}^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{R^3}{\hat{r}^4} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{R^2}{\hat{r}^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 && \quad \left| \cdot \frac{\hat{r}^4}{R^4} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \end{aligned}$$

Laplacegleichungen der Gebiete

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}}_{A_1} = 0 \quad , \quad \underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}}_{A_2'} = 0$$

Erkenntnis:

- ▶ wir schreiben nur R anstelle von r
- ▶ Die Form der *Laplacegleichung* ändert sich nicht
- ▶ A_1 und A_2' haben den selben Differenzenstern
- ▶ Gleichungssystem einfach zu erstellen

Vereinbarungen

Ziel: Aufstellen eines Gleichungssystems, in das man beliebige Ladungen einsetzen kann

- ▶ Aufgrund des beschränkten Platzes, muss ein Beispiel genommen werden, in dem nicht alles sofort ersichtlich ist
- ▶ die radiale Gitterauflösung beträgt 3 (inklusive Rand und Ursprung)
- ▶ die azimutale Gitterauflösung beträgt 4
- ▶ das Gitter sei äquidistant
- ▶ alle Punkte werden gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert, angefangen im Ursprung

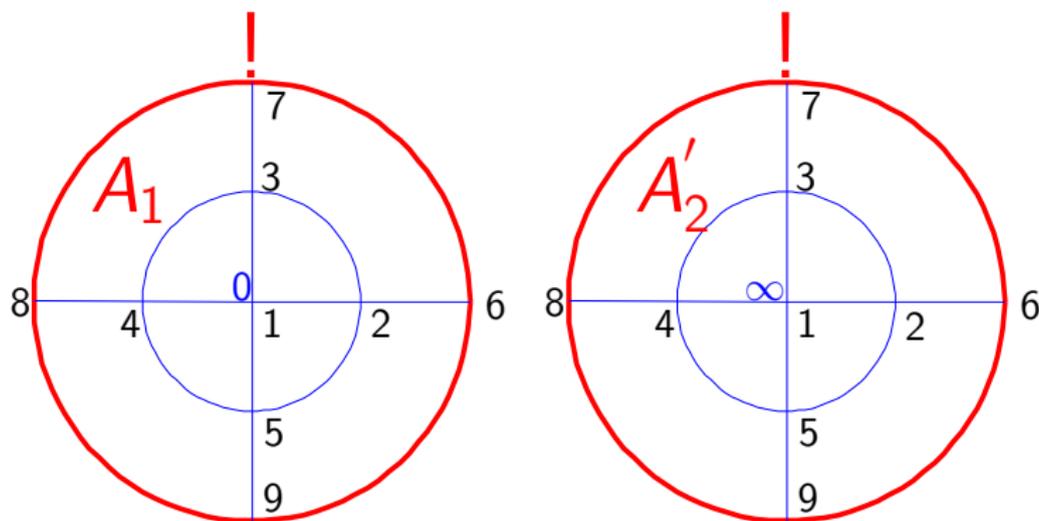


Abbildung: äquidistante Diskretisierung der beiden Gebiete

Der Rand von A_1 muss auf einen Gitterpunkt in A_2 zugreifen

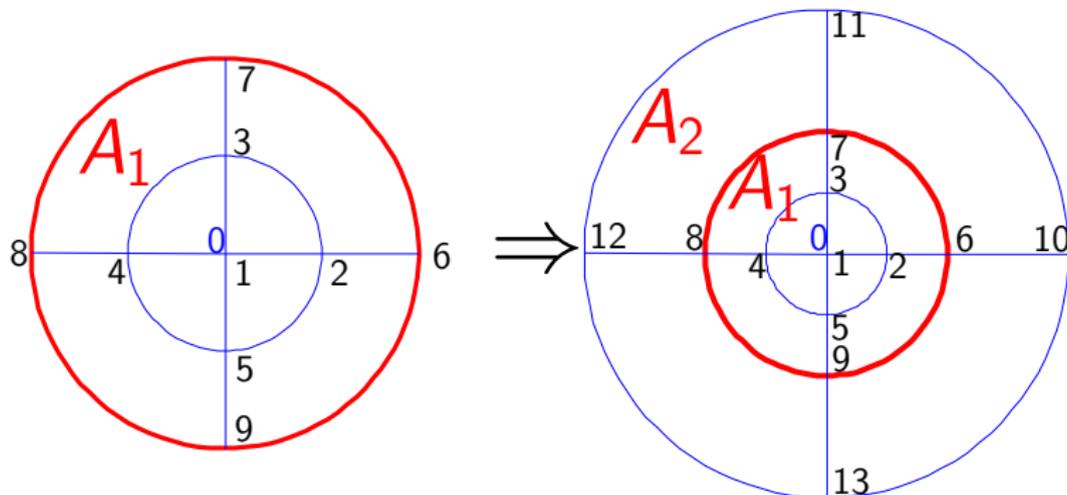
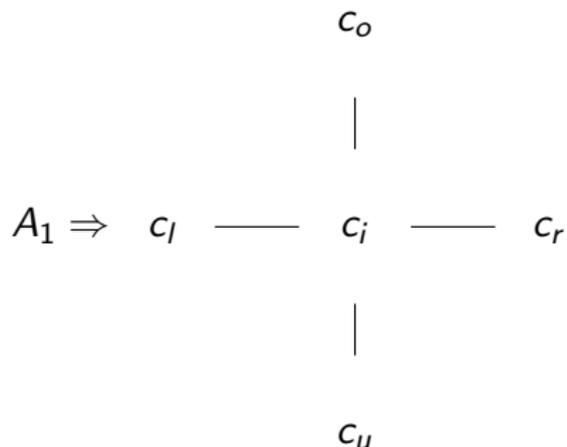


Abbildung: Erweiterung des Gebietes A_1 mit einer nicht äquidistanten Diskretisierung

Ermitteln der Differenzensterne

Für das Innere der Gebiete A_1 und A'_2 können wir auf den schon hergeleiteten Differenzenstern zurückgreifen:



Ermitteln der Differenzensterne

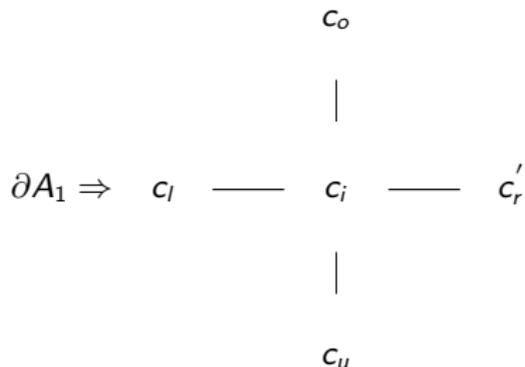
Für das Innere der Gebiete A_1 und A'_2 können wir auf den schon hergeleiteten Differenzenstern zurückgreifen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_o & & \\
 & & & & | & & \\
 A'_2 \Rightarrow & C_l & \text{---} & C_i & \text{---} & C_r & \\
 & & & & | & & \\
 & & & & C_u & &
 \end{array}$$

In den schon hergeleiteten Koeffizienten ändert sich nur r zu R

Ermitteln der Differenzensterne

Für den Rand in A_1 erhalten wir einen leicht veränderten Differenzenstern:



$$\text{mit } c'_r = \frac{2h^2 r^2 + h^2 r k'}{h^2 r^2 + k'^2} \text{ wobei } k' = r_{10} - r_6 = \frac{\hat{r}^2}{R_2} - r_6$$

Aufstellen des Gl.-Systems für A_1

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
 c & c & c & c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & c_2 & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & c_u & c_3 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & 0 & c_u & c_4 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & c_o & 0 & c_u & c_5 & 0 & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & c_l & 0 & 0 & 0 & c_6 & c_o & 0 & c_u & c'_r & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & c_u & c_7 & c_o & 0 & 0 & c'_r & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & c_u & c_8 & c_o & 0 & 0 & c'_r & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_l & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 & c'_r \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}}_{A_1}
 \underbrace{\begin{pmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9 \\
 u_{10} \\
 u_{11} \\
 u_{12} \\
 u_{13}
 \end{pmatrix}}_{x_1}
 =
 \underbrace{\begin{pmatrix}
 q_1 \\
 q_2 \\
 q_3 \\
 q_4 \\
 q_5 \\
 q_6 \\
 q_7 \\
 q_8 \\
 q_9 \\
 q_{10} \\
 q_{11} \\
 q_{12} \\
 q_{13}
 \end{pmatrix}}_{b_1}$$

Aufstellen des Gl.-Systems für A'_2

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & C_o & 0 & C_u & C_r & 0 & 0 & 0 \\ C_u & C_3 & C_o & 0 & 0 & C_r & 0 & 0 \\ 0 & C_u & C_4 & C_o & 0 & 0 & C_r & 0 \\ C_o & 0 & C_u & C_5 & 0 & 0 & 0 & C_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'_2} \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{pmatrix}}_{x_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} Q_2 - C_1 \cdot 0 \\ Q_3 - C_1 \cdot 0 \\ Q_4 - C_1 \cdot 0 \\ Q_5 - C_1 \cdot 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{pmatrix}}_{b_2}$$

Zusammenführen der Gl.-Systeme

Hier ist zu beachten:

- ▶ Die Orientierung der beiden Gebiete ist gegenläufig
- ▶ die linken und rechten Koeffizienten des Diff.-Sternes von A_2' sind zu vertauschen

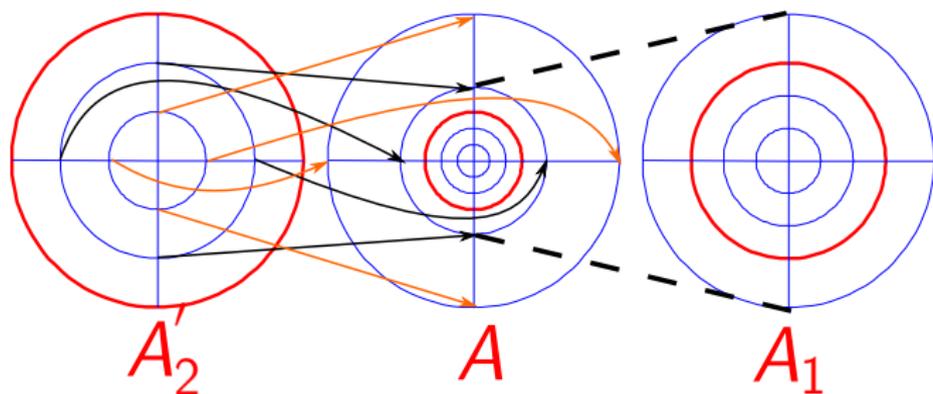


Abbildung: Zusammenhang der Gitterpunkte für feinere Gitter

Zusammenführen der Gl.-Systeme

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
 c & c & c & c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & c_2 & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & c_u & c_3 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & 0 & c_u & c_4 & c_o & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_l & c_o & 0 & c_u & c_5 & 0 & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & c_l & 0 & 0 & 0 & c_6 & c_o & 0 & c_u & c'_r & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & c_u & c_7 & c_o & 0 & 0 & c'_r & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & c_u & c_8 & c_o & 0 & 0 & c'_r & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_l & c_o & 0 & c_u & c_r & 0 & 0 & 0 & c'_r \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_o & 0 & c_u \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & c_u & c_3 & c_o & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & c_u & c_4 & c_o \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_r & c_o & 0 & c_u & c_5
 \end{pmatrix}}_A
 \underbrace{\begin{pmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5
 \end{pmatrix}}_x
 =
 \underbrace{\begin{pmatrix}
 q_1 \\
 q_2 \\
 q_3 \\
 q_4 \\
 q_5 \\
 q_6 \\
 q_7 \\
 q_8 \\
 q_9 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5
 \end{pmatrix}}_b$$

Fazit

- ▶ Wir haben die *Laplace*gl. numerisch mit einem offenen Rand gelöst
- ▶ Mittels unserem allg. Gleichungssystems lassen sich Potentialverläufe im freien Raum beliebiger Anordnung berechnen
- ▶ Wir haben dazu die Kelvintransformation benutzt
 - ▶ Die Form der *Laplace*gl. bleibt bei der Transformation erhalten (Subst.: $r \rightarrow R$)
 - ▶ Der Winkel α bleibt in allen Gebieten erhalten
- ▶ **Jedoch:** Unser Gl.-System ist für eine Berechnung viel zu grob
- ▶ Bei einer Programmierung für beliebige Gitterauflösungen muss auf die Vertauschung der Koeffizienten und die Gegenläufigkeit geachtet werden

Aussicht

- ▶ Genauigkeit?
- ▶ wie gut ist unser Rand?
- ▶ beste Anordnung für ein Problem?
- ▶ beste Gitteranordnung?

Beispiel mit Matlab

ENDE

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!