Sonderübung GET-A
Lineare Gleichungssysteme / Matrizenrechnung

<korthals@mail.upb.de>

a

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x &= 6 && \qquad\qquad | \cdot 3^{-1} \\
3^{-1} \cdot 3 \cdot x &= 6 \cdot 3^{-1} \\
1 \cdot x &= 2
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{a \cdot x = b} \\
\swarrow & \searrow \\
a \neq 0 & a = 0 \\
\underbrace{\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ b = 0 & b \neq 0 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x = 0 & x = \frac{b}{a} \end{array}}_{\text{eindeutige Lösung}} &
\underbrace{\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ b = 0 & b \neq 0 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x \in \mathbf{R} & x \in \varnothing \end{array}}_{\text{keine eindeutige Lösung}}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a \cdot x &= b && \qquad\qquad | \cdot a^{-1} \text{ mit } a \neq 0 \\
a^{-1} \cdot a \cdot x &= b \cdot a^{-1} \\
1 \cdot x &= \frac{b}{a} \\
\underline{\underline{x}} &= \frac{b}{\underline{\underline{a}}}
\end{aligned}
$$

c

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 8$$

$$\text{Rate:} \qquad (x_1, x_2) \in \{(1,2); (2,0); \dots\}$$

$$\Rightarrow x_2 = 4 - 2 \cdot x_1$$

- unbestimmtes Gleichungssystem
- unendlich viele Lösungen

d

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 8 && \mid \cdot \frac{1}{4} \\ 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 12 && \mid \cdot (-\frac{1}{8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 &= 2 \\ -x_1 - \frac{1}{4} \cdot x_2 &= -\frac{3}{2} && \mid + (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 &= 2 \\ 0 + \frac{1}{4} \cdot x_2 &= \frac{1}{2} && \mid \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 &= 2 \\ \underline{\underline{x_2}} &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 &= 2 \\ \underline{\underline{x_1}} &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

- eindeutige Lösung

e

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 8 \qquad | \cdot \frac{1}{4}$$
$$8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 12 \qquad | \cdot (-\frac{1}{8})$$

$$x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 = 2$$
$$-x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 = -\frac{3}{2} \qquad | + (1)$$

$$x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 = 2$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$$

- keine Lösung!

f

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 8 \qquad | \cdot \frac{1}{4}$$
$$8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 16 \qquad | \cdot (-\frac{1}{8})$$

$$x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 = 2$$
$$-x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 = 2$$

- ∞ - viele Lösungen $\quad x_2 = 4 - 2 \cdot x_1$
- linear abhängig
- tritt bei falschen Maschen auf

Einschub: Matrix & Vektor

$$\text{Spaltenvektor:} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

$$\text{Zeilenvektor:} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Regeln/Gesetze:} \qquad & \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \\ \text{Kommutativgesetz:} \qquad & \underline{\underline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}} \\ \text{Distributivgesetz:} \qquad & \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \\ \text{Assoziativgesetz:} \qquad & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

Determinanten (Sonderfälle)

2x2

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3x3

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \det\mathbf{A} = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = a{\cdot}e{\cdot}i + b{\cdot}f{\cdot}g + c{\cdot}d{\cdot}h - c{\cdot}e{\cdot}g - a{\cdot}f{\cdot}h - b{\cdot}d{\cdot}i$$

Inverse / Einheitsmatrix

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{1}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ ist die <u>Inverse</u> zu $\mathbf{A}$

g Darstellung in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 8 \\ 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 12 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Dimensionen der Matrizen müssen passen!

h Matrixprodukt (Matrix/Vektor)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cl} & & x_1 & \\ & & x_2 & \\ \hline a_{11} & a_{12} & b_1 & = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{array} \Big\} \text{Skalarprodukt}$$

i Lösen eines lin. Gleichungssystem (Prinzip analog zu a)

- Annahme: $\mathbf{A}^{-1}$ existiert

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} && | \cdot \mathbf{A^{-1}} \\ \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Problem: Wie bestimmt man $\mathbf{A^{-1}}$

j Inverse einer 2x2 Matrix (Sonderfall)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{\det\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

Allgemein:

$$\mathbf{A}_{n\times n}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}_{adj})^T$$

$\mathbf{A}_{adj}$: siehe Literatur

Bsp.:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}_{adj})^T \\
&= \frac{1}{4\cdot 2 - 8 \cdot 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-8} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

k 1. Bsp.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b}$$

$$\begin{array}{cc|cc|cccc|c}
 & & 4 & 2 & x_1 & & & 8 & \\
 & & 8 & 2 & x_2 & & & 12 & \\
\hline
-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & x_1 = & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & 1 \\
1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & x_2 = & 1 & -\frac{1}{2} & & 2
\end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

l 2. Bsp.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}_{adj})^T$$

$$\underline{\underline{\det \mathbf{A} = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = 0}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\text{existiert nicht!}$$

m

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\underbrace{\begin{array}{c} \det \mathbf{A} \neq 0 \\ \swarrow \qquad\qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \mathbf{b} = \mathbf{0} & \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \mathbf{0} & \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{array} \end{array}}_{\text{eindeutige Lösung}} &
\underbrace{\begin{array}{c} \det \mathbf{A} = 0 \\ \swarrow \qquad\qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \mathbf{b} = \mathbf{0} & \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n & \mathbf{x} \in \varnothing \end{array} \end{array}}_{\text{keine eindeutige Lösung}}
\end{array}
\end{array}$$